M2/CFP/Parcours de Physique Théorique
Invariances en physique et théorie des groupes

Construction de Schwinger des représentations irréductibles de SU(2)

L'objet de ce problème est de construire les représentations irréductibles de SU(2), en suivant la méthode de Schwinger.

On considère deux oscillateurs harmoniques indépendants et leurs opérateurs de création et d'annihilation respectifs a_1^+, a_1 et a_2^+, a_2 vérifiant les relations de commutation

$$[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}\,. \tag{1}$$

1) Quelle est l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs $J_i = \frac{1}{2}a^+\,\sigma_i\,a$? On a posé

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

et

$$a^+ = (a_1^+\,a_2^+)\,. \tag{3}$$

Les σ_i sont les matrices de Pauli, dont on rappelle l'expression:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,. \tag{4}$$

2) Introduisons les opérateurs "nombre d'occupation"

$$N_1 = a_1^+\,a_1 \qquad \text{et} \qquad N_2 = a_2^+\,a_2\,. \tag{5}$$

On désigne par $|n_1,\, n_2\rangle$ un état propre de N_1 et N_2 :

$$\begin{aligned} N_1\,|n_1\,n_2\rangle &= n_1|n_1\,n_2\rangle \\ N_2\,|n_1\,n_2\rangle &= n_2|n_1\,n_2\rangle\,. \end{aligned} \tag{6}$$

a) Exprimer les opérateurs J_3 et $\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ en fonction de N_1 et N_2.

b) Construire explicitement les états $|n_1,\, n_2\rangle$ à partir du vide.

c) Utiliser ces résultats pour construire une base de vecteurs propres de $\vec{J}^2$ et J_3

$$\vec{J}^2|j\,m\rangle = j(j+1)|j\,m\rangle \tag{7}$$

$$J_3|j\,m\rangle = m\,|j,m\rangle\,. \tag{8}$$

Exprimer j et m en fonction des nombres d'occupation n_1 et n_2.
Retrouver les résultats standards de la théorie du moment cinétique.

3) On se propose de calculer l'élément de matrice $d^j_{mm'}(\theta) = \langle j\,m|e^{-i\theta J_2}|j\,m'\rangle$ en s'appuyant sur les résultats précédents. On considère la fonction génératrice

$$g^j_m(x_1, x_2; \theta) = \sum_{m'} \frac{x_1^{j+m'}\,x_2^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}}\, d^j_{mm'}(\theta)\,. \tag{9}$$

a) Montrer que

$$g^j_m(x_1, x_2; \theta) = \langle j\,m|\, e^{-i\theta J_2} \frac{(x_1\,a_1^+ + x_2\,a_2^+)^{2j}}{(2j)!}|0\rangle\,. \tag{10}$$

b) Etablir que

$$g^j_m(x_1, x_2; \theta) = \frac{1}{(2j)!}\langle j\,m| \left[a_1^+\left(x_1\cos\frac{\theta}{2} - x_2\sin\frac{\theta}{2}\right) + a_2^+\left(x_2\cos\frac{\theta}{2} + x_1\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]^{2j}|0\rangle\,. \tag{11}$$

Il pourra être utile de calculer $u(\theta) = e^{-i\theta J_2}a_1^+e^{i\theta J_2}$ et $v(\theta) = e^{-i\theta J_2}a_2^+e^{i\theta J_2}$, solutions d'un système d'équations différentielles.

c) En déduire une forme explicite de $g^j_m(x_1,\, x_2; \theta)$.

d) Donner finalement l'expression de $d^j_{mm'}(\theta)$ en fonction des polynômes de Jacobi

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-a}(1+x)^{-b}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{a+n}(1+x)^{b+n}\right]\,. \tag{12}$$

Il pourra être commode de poser $x_1 = -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ et $x_2 = t - \cos^2\frac{\theta}{2}$.