Groupes et algèbres de Lie de dimension 3

1) groupe $SU(1,1)$: matrices 2×2 complexes A telles que $AgA^+ = g$ avec $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\iff gA^+ = A^{-1}g$ et $\det A = 1$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad-bc=1$ $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\frac{1}{ad-bc} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$A^+ = \begin{pmatrix} \bar a & \bar c \\ \bar b & \bar d \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = g$

$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar a & \bar c \\ -\bar b & -\bar d \end{pmatrix} = gA^+$ $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & b \\ -c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & -a \end{pmatrix} = A^{-1}g$

$gA^+ = A^{-1}g$ conduit donc à $\left| \begin{array}{l} a = \bar d \\ b = \bar c \end{array} \right.$

$\left.\begin{array}{l} a = \bar d \\ b = \bar c \\ ad-bc=1 \end{array}\right\}$ 5 contraintes sur 8 nombres réels, ce qui conduit donc à 3 nombres réels indépendants : <u>la dimension de $SU(1,1)$ est donc 3</u>

2) a) $Xg + gX^+ = 0 \iff g^{-1}Xg = -X^+$, or $g^{-1} = g$. $\qquad X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & -X_{12} \\ X_{21} & -X_{22} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & -X_{12} \\ X_{21} & -X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & -X_{12} \\ -X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = gXg$ $\qquad X^+ = \begin{pmatrix} \overline{X_{11}} & \overline{X_{21}} \\ \overline{X_{12}} & \overline{X_{22}} \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} X_{11} = -\overline{X_{11}} \\ X_{21} = \overline{X_{12}} \\ X_{12} = \overline{X_{21}} \ \text{id.} \\ X_{22} = -\overline{X_{22}} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} X_{11} = -\overline{X_{11}} \\ X_{21} = \overline{X_{12}} \\ X_{22} = -\overline{X_{22}} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} X_{11}, X_{22} \text{ imaginaires purs} \\ X_{12} = \overline{X_{21}} \end{array}\right.$

$S_1 = \sigma_1$ $\quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k$ $\quad$ rappel : $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$S_2 = \sigma_2$ $\quad [S_1, S_2] = 2i\sigma_3 = 2S_3$ $\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$S_3 = i\sigma_3$ $\quad [S_2, S_3] = i2i\sigma_1 = -2\sigma_1 = -2S_1$ $\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$[S_3, S_1] = i2i\sigma_2 = -2\sigma_2 = -2S_2$

d) Non car pas de changement de base possible

3) a) $SL(2,\mathbb{R})$

Matrices réelles 2×2 de det 1

b) $A = 1 + X$ $\quad \det A \simeq 1 + \operatorname{tr} X$ $\quad$ donc $\det A \Leftrightarrow \operatorname{tr} X = 0$

$\Rightarrow$ X est une matrice réelle de trace nulle

base : $e_1 = \sigma_1 \quad e_2 = i\sigma_2 \quad e_3 = \sigma_3$

$[e_1, e_2] = -2e_3$

$[e_2, e_3] = i[\sigma_2, \sigma_3] = -2\sigma_1 = -2e_1$

$[e_3, e_1] = 2i\sigma_2 = 2e_2$

4) $(e_3, e_1, e_2) \longleftrightarrow (S_1, S_2, S_3)$

5) algèbre $so(2,1)$:

groupe d'invariance de la forme $x^2 + y^2 - z^2$, i.e. matrices B à coef. réels 3×3 satisfaisant (i) : $B g B^t = g$ $\quad g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ 6 conditions car ${}^tB$ vérifie la même équation : $BgB^t = g$ donne, car $g^{-1} = g$,

$BgB^tg = 1$ soit $gB^tg = B^{-1}$

$B^tg = gB^{-1}$ d'où $B^tgB = g$

ainsi on a $9 - 6 = \underline{3 \text{ coefficients réels}}$

donc $\underline{\dim O(2,1) = 3}$

(ii) $\det B = 1$ ne réduit pas la dimension car (i) $\Rightarrow \det B = \pm 1$

<u>au niveau de l'algèbre</u> : $B = 1 + X$

$(1+X)\,g\,(1+X^t) = g$ $\quad$ i.e. $Xg + gX^t = 0$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & -x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & -x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & -x_{33} \end{pmatrix} = Xg \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ -x_{13} & -x_{23} & -x_{33} \end{pmatrix} = gX^t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{11} = x_{22} = x_{33} = 0 \\ x_{12} = -x_{21} \qquad x_{23} = x_{32} \\ x_{13} = x_{31} \end{cases}$$

la condition (ii) donne $\operatorname{tr} X = 0$ qui est bien vérifiée.

<u>Remarque:</u> autour de l'identité, seule la condition $\det B = +1$ peut être satisfaite. $\det B = -1$ donne une composante connexe déconnectée.

<u>base:</u> $\tilde{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

relations de commutations

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{J}_1 \tilde{J}_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{J}_1 \tilde{J}_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{J}_2 \tilde{J}_3$$

$\tilde{J}_1^t = \tilde{J}_1$, $\tilde{J}_2^t = \tilde{J}_2$ et $\tilde{J}_3^t = -\tilde{J}_3$

donc
* $[\tilde{J}_1, \tilde{J}_2] = \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 - {}^t\tilde{J}_2\, {}^t\tilde{J}_1 = \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 - {}^t(\tilde{J}_1 \tilde{J}_2) = \tilde{J}_3$
* $[\tilde{J}_1, \tilde{J}_3] = \tilde{J}_1 \tilde{J}_3 + {}^t\tilde{J}_3\, {}^t\tilde{J}_1 = \tilde{J}_1 \tilde{J}_3 + {}^t(\tilde{J}_1 \tilde{J}_3) = \tilde{J}_2$
* $[\tilde{J}_2, \tilde{J}_3] = \tilde{J}_2 \tilde{J}_3 + {}^t\tilde{J}_3\, \tilde{J}_2 = \tilde{J}_2 \tilde{J}_3 + {}^t(\tilde{J}_2 \tilde{J}_3) = -\tilde{J}_1$

en posant $(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3) \leftrightarrow \left(\frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}, \frac{s_3}{2}\right)$ on constate l'isomorphisme de $so(2,1)$ avec $su(1,1)$ et donc aussi $sl(2,\mathbb{R})$

6) Pour $so(2,1)$:

$$C_{12}{}^{k} = \delta_3^k \qquad C_{13}{}^{k} = \delta_2^k \qquad C_{23}{}^{k} = -\delta_1^k$$

$$\Rightarrow g_{11} = 2 C_{12}{}^{3} C_{13}{}^{2} = 2$$

$$g_{22} = 2 C_{21}{}^{3} C_{23}{}^{1} = 2$$

$$g_{33} = 2 C_{32}{}^{1} C_{31}{}^{2} = -2$$

Les autres coefficients sont nuls.

g est donc indéfinie, de signature $(+,+,-)$: l'algèbre est donc semi-simple, mais non compacte.

Posons $\quad A = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \qquad C = \frac{1}{2}(e_1 - e_2) \qquad B = +\frac{1}{2} e_3$

$$[A,B] = -\frac{1}{4}[e_1, e_3] - \frac{1}{4}[e_2, e_3] = \frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_1 = A$$

$$[A,C] = -\frac{1}{4}[e_1, e_2] + \frac{1}{4}[e_2, e_1] = -\frac{1}{2}[e_1, e_2] = e_3 = +2B$$

$$[B,C] = -\frac{1}{4}[e_3, e_1] + \frac{1}{4}[e_3, e_2] = -\frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_1 = C$$