Fonction de Green du Fermion

On cherche $K(x_2, x_1)$ t.q

$$\psi(t_2, \vec{x}_2) = \int d^3x_1 \, K(t_2, \vec{x}_2 ; t_1, \vec{x}_1) \, \gamma^0 \psi(t_1, \vec{x}_1)$$

$$\psi(t, \vec{x}) = \sum_\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \left[a^{(\alpha)}(k) u^{(\alpha)}(k) e^{-ik.x} + b^{(\alpha)*}(k) v^{(\alpha)}(k) e^{ik.x} \right]$$

$$\left.\begin{array}{l} (\not p - m) \, u(p) = 0 \\ \bar{u}(p)(\not p - m) = 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \quad \bar{\psi}^{(+)(\alpha)}(x) \gamma^0 \psi^{(+)(\beta)}(x)$$

$$= \bar{u}^{(\alpha)}(k) \gamma^0 u^{(\beta)}(k)$$

$$= \bar{u}^{(\alpha)} \frac{\{\not k, \gamma^0\}}{2m} u^{(\beta)}(k)$$

$$= \frac{E}{m} \delta_{\alpha\beta}$$

de même

$$\left.\begin{array}{l} (\not p + m) \, v(p) = 0 \\ \bar{v}(p)(\not p + m) = 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \quad \bar{\psi}^{(-)(\alpha)}(x) \gamma^0 \psi^{(-)(\beta)}(x)$$

$$= \bar{v}^{(\alpha)}(k) \gamma^0 v^{(\beta)}(k)$$

$$= -\bar{v}^{(\alpha)}(k) \frac{\{\not k, \gamma^0\}}{2m} v^{(\beta)}(k)$$

$$= \frac{E}{m} \delta_{\alpha\beta}$$

donc :

$$\begin{cases} a^{(\alpha)}(k) = \int d^3x \, \bar{u}^{(\alpha)}(k) e^{-i\vec{k}.\vec{x}} \gamma^0 \psi(0, \vec{x}) \\ b^{(\alpha)*}(k) = \int d^3x \, \bar{v}^{(\alpha)}(k) e^{i\vec{k}.\vec{x}} \gamma^0 \psi(0, \vec{x}) \end{cases}$$

$$\psi(t_2, \vec{x}_2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_\alpha \int d^3x_1 \left[u^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(k) e^{-ik.(x_2 - x_1)} \right.$$

$$\left. + v^{(\alpha)}(k) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(k) e^{ik(x_2 - x_1)} \right] \gamma^0 \psi(t_1, \vec{x}_1)$$

d'où $$K(t_2,\vec{x}_2\,;\,t_1,\vec{x}_1) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{m}{E}\sum_{\alpha}\Big[u^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{u}^{(\alpha)}(k)\,e^{-ik.(x_2-x_1)} + v^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{v}^{(\alpha)}(k)\,e^{ik.(x_2-x_1)}\Big]$$

pour $t_2 > t_1$

or $$\begin{cases} \Lambda_+(k) \equiv \sum\limits_{\alpha=1,2} u^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{u}^{(\alpha)}(k) = \dfrac{\not{k}+m}{2m} \\[2ex] \Lambda_-(k) \equiv -\sum\limits_{\alpha=1,2} v^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{v}^{(\alpha)}(k) = \dfrac{-\not{k}+m}{2m} \end{cases}$$

donc $$K_{ret}(x_2,x_1) = \Theta(t_2-t_1)\int\frac{d^3k}{2E(2\pi)^3}\Big[(\not{k}+m)\,e^{-ik.(x_2-x_1)} + (\not{k}-m)\,e^{ik.(x_2-x_1)}\Big]$$

vérifions que $K_{ret}(x_2,x_1)$ est fonction de Green de l'éq. de Dirac:

$$(i\not{\partial}_2-m)\,K_{ret}(x_2,x_1) = i\gamma_0\,\delta(t_2-t_1)\int\frac{d^3k}{2E(2\pi)^3}\Big[(\not{k}+m)\,e^{i\vec{k}.(\vec{x}_2-\vec{x}_1)}\ ① + (\not{k}-m)\,e^{-i\vec{k}.(\vec{x}_2-\vec{x}_1)}\ ②\Big] + \Theta(t_2-t_1)\int\frac{d^3k}{2E(2\pi)^3}\Big[\underbrace{(\not{k}+m)(\not{k}-m)}_{0}\,e^{-ik.(x_2-x_1)} + \underbrace{(\not{k}-m)(-\not{k}-m)}_{0}\,e^{ik.(x_2-x_1)}\Big]$$

en faisant $\vec{k}\to-\vec{k}$ dans ②, le coefficient de $\vec{\gamma}.\vec{k}+m$ donne 0.

Donc $$\boxed{(i\not{\partial}_2-m)\,K_{ret}(x_2,x_1) = i\,\delta^4(x_2-x_1)}$$

rem: $$G_{ret}(x_2-x_1) = \frac{i\,\Theta(x_2^0-x_1^0)}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2E}\Big[e^{-ik.(x_2-x_1)} - e^{ik.(x_2-x_1)}\Big]$$

$$-i(i\not{\partial}_2+m)\,G_{ret}(x_2-x_1) = \Theta(x_2^0-x_1^0)\int\frac{d^3k}{2E(2\pi)^3}\Big[(\not{k}+m)\,e^{-ik.(x_2-x_1)} + (\not{k}-m)\,e^{ik.(x_2-x_1)}\Big]$$

(le terme en $\delta(x_2^0-x_1^0)$ donne 0 par changement de variable $\vec{k}\to-\vec{k}$

Donc : $\| K_{ret}(x_2 - x_1) = -i\,(i\partial\!\!\!/_2 + m)\, G_{ret}(x_2 - x_1)$

rem : $(\Box_2 + m^2)\, G_{ret}(x_2 - x_1) = \delta^4(x_2 - x_1)$

donc : $(i\partial\!\!\!/_2 - m)\, K_{ret}(x_2 - x_1) = -i(-\partial_2^2 - m^2)\, G_{ret}(x_2 - x_1)$
$= i\,\delta^4(x_2 - x_1)$

on retrouve le fait que K_{ret} est fonction de Green de l'éq. de Dirac

$$G_{ret}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{e^{-ik.x}}{(k_0 + i\varepsilon)^2 - \vec{k}^2 - m^2}$$

donc : $$K_{ret}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ik.x}\, \frac{k\!\!\!/ + m}{(k_0 + i\varepsilon)^2 - \vec{k}^2 - m^2}$$

Fonction de Green de Feynman :

$$S_F(x_2, x_1) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2E}\Big[\Theta(t_2 - t_1)\, a\, (k\!\!\!/ + m)\, e^{-ik.(x_2 - x_1)}$$
$$+\ \Theta(t_1 - t_2)\, b\, (k\!\!\!/ - m)\, e^{ik.(x_2 - x_1)}\Big]$$

terme $\Theta(t_2 - t_1)$: décrit . l'apparition d'un électron à $(t_1, \vec{x}_1)$
. la propagation de l'électron de $(t_1, \vec{x}_1)$ à $(t_2, \vec{x}_2)$
. sa disparition en $(t_2, \vec{x}_2)$

terme $\Theta(t_1 - t_2)$: décrit . l'apparition d'un positron à $(t_2, \vec{x}_2)$
. la propagation du positron de $(t_2, \vec{x}_2)$ à $(t_1, \vec{x}_1)$
. sa disparition en $(t_1, \vec{x}_1)$

on impose $(i\partial\!\!\!/_2 - m)\, S_F(x_2, x_1) = \delta^4(x_2 - x_1)$ (attention à la normalisation)

$$(i\not\partial_2 - m)\, S_F(x_2,x_1) = i\delta(t_2-t_1)\int \frac{d^3k}{2E(2\pi)^3}\,\gamma^0\Big[a(\not k+m)\,e^{i\vec k\cdot(\vec x_2-\vec x_1)} - b(\not k-m)\,e^{-i\vec k\cdot(\vec x_2-\vec x_1)}\Big]$$

$$= i\delta(t_2-t_1)\int \frac{d^3k}{2E(2\pi)^3}\,\gamma^0\Big[a(E\gamma^0-\vec\gamma\cdot\vec k+m)\,e^{i\vec k\cdot(\vec x_2-\vec x_1)} - b(E\gamma^0-\vec\gamma\cdot\vec k-m)\,e^{-i\vec k\cdot(\vec x_2-\vec x_1)}\Big]$$

donc $a = -b = -i$

$$S_F(x_2-x_1) = \frac{1}{i}\int \frac{d^3k}{2E(2\pi)^3}\Big[\Theta(t_2-t_1)(\not k+m)\,e^{-ik\cdot(x_2-x_1)} - \Theta(t_1-t_2)(\not k-m)\,e^{ik\cdot(x_2-x_1)}\Big]$$

rem: $K_{ret}(x_2,x_1)$ et $iS_F(x_2-x_1)$ ne diffèrent que par une solution de l'éq. de Dirac homogène :

on a en effet $K_{ret}(x_2,x_1) - iS_F(x_2,x_1) = \int \frac{d^3k}{2E(2\pi)^3}(\not k-m)\,e^{ik\cdot(x_2-x_1)}$

et $(i\not\partial_2 - m)\big[K_{ret}(x_2,x_1) - iS_F(x_2,x_1)\big] = 0 \quad (k^2-m^2=0)$

expression covariante de S_F :

$$\Theta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2i\pi}\,\frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\varepsilon}$$

donc : $$S_F(x) = -\int\frac{d^3k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{2E}\Big[(\not k+m)\,e^{-ik\cdot x}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{\omega-i\varepsilon}\,e^{i\omega t}}_{①} - (\not k-m)\,e^{ik\cdot x}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{\omega-i\varepsilon}\,e^{-i\omega t}}_{②}\Big]$$

dans ① : $p^0 = E-\omega \qquad \vec p = \vec k \qquad E = k^0 = \sqrt{\vec k^2+m^2}$

dans ② : $p^0 = \omega - E \qquad \vec p = -\vec k$

Donc $S_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip.x}}{2E} \left[\frac{E\gamma^0 + \vec{\gamma}.\vec{p} - m}{E + p^0 - i\varepsilon} - \frac{E\gamma^0 - \vec{\gamma}.\vec{p} + m}{E - p^0 - i\varepsilon} \right]$

$$(E + p^0 - i\varepsilon)(E - p^0 - i\varepsilon) = -(p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\varepsilon)$$

donc $\Big\| \; S_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip.x} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$

rem: avec $m_\varepsilon = m - i\varepsilon$ $\quad \varepsilon \to 0^+$

$$\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{\not{p} + m_\varepsilon}{p^2 - m_\varepsilon^2} = \frac{1}{\not{p} - m_\varepsilon} = \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon}$$

donc $\Big\| \; S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon}$

rem: $S_F(x) = -(i\not{\partial} + m)\, G_F(x)$

en théorie des champs quantiques:

$$i S_{F_{ab}}(x-y) = \langle 0 | T(\psi_a(x), \overline{\psi}_b(y)) | 0 \rangle$$