# Potentiel de Liénard-Wiechert

$$A^\alpha(x) = \frac{4\pi}{c}\int d^4x'\, D_{ret}(x-x')\, J^\alpha(x')$$

(si $A_{in} = 0$) $\qquad D_{ret}(x-x') = \frac{1}{2\pi}\,\theta(x_0-x_0')\,\delta[(x-x')^2]$

$$J^\alpha(x') = ec\int d\tau\, V^\alpha(\tau)\,\delta^{(4)}[x'-r(\tau)]$$

donc $$A^\alpha(x) = 2e\int d\tau\, V^\alpha(\tau)\,\theta(x_0-r_0(\tau))\,\delta[(x-r(\tau))^2]$$

$\tau_0$ est défini par la condition de cône de lumière $[x-r(\tau_0)]^2=0$

avec $x_0 > r_0(\tau_0)$

de $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left|\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_i}\right|}$ , on tire le résultat :

$$\frac{d}{d\tau}[x-r(\tau)]^2 = -2[x-r(\tau)]_\beta V^\beta(\tau) \qquad \text{évalué en } \tau=\tau_0$$

D'où $$\boxed{A^\alpha(x) = \left.\frac{eV^\alpha(\tau)}{V\cdot(x-r(\tau))}\right|_{\tau=\tau_0}}$$

Forme non covariante : on utilise $x_0 - r_0(\tau_0) = |\vec{x} - \vec{r}(\tau_0)| = R$

$$V\cdot(x-r) = V_0\,(x_0-r_0(\tau_0)) - \vec{V}\cdot(\vec{x}-\vec{r}(\tau))$$
$$= \gamma c R - \gamma\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,R = \gamma c R\,(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})$$

$\vec{n}$ : vecteur unitaire le long de $\vec{x}-\vec{r}(\tau)$

$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}(\tau)}{c}$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$V = (V_0,\vec{V}) \qquad \begin{cases} V_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{dx_0}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma c \\ \vec{V} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\vec{v} \end{cases} \qquad V^2 = c^2$$

donc : $\Phi(\vec{x},t) = \left.\dfrac{e}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})R}\right|_{ret}$ $\qquad$ $\vec{A}(x,t) = \left.\dfrac{e\vec{\beta}}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})R}\right|_{ret}$

(qui se réduit au résultat classique dans la limite non relativiste)

<u>calcul de $F^{\alpha\beta}(x)$ :</u> on peut partir de l'expression de $A^\alpha(x)$

Il est plus simple de partir de $A^\alpha(x) = \int d\tau \ldots$

différentiation de $\Theta(x_0 - r_0(\tau)) \to \delta(x_0 - r_0(\tau)) \to \delta(R^2)$

En excluant $R=0$, on a donc :

$$\partial^\alpha A^\beta = 2e\int d\tau\, V^\beta(\tau)\, \Theta(x_0 - r_0(\tau))\, \partial^\alpha \delta[(x-r(\tau))^2]$$

$$\partial^\alpha \delta[f] = \partial^\alpha f \frac{d}{df}\delta[f] = \partial^\alpha f \frac{d\tau}{df}\cdot\frac{d}{d\tau}\delta[f] \qquad f = (x-r(\tau))^2$$

$$\text{donc } \partial^\alpha\delta[f] = -\frac{(x-r)^\alpha}{V\cdot(x-r)}\frac{d}{d\tau}\delta[f]$$

$$\text{d'où } \partial^\alpha A^\beta = 2e\int d\tau \frac{d}{d\tau}\left[\frac{(x-r)^\alpha V^\beta}{V\cdot(x-r)}\right]\Theta[x_0 - r_0(\tau)]\,\delta[(x-r(\tau))^2]$$

(par intégration par parties ; la dérivée de $\Theta$ ne donne pas de contribution pour $R \neq 0$, pour la même raison que ci-dessus).

La suite du calcul est identique à celle menant à l'expression de $A^\alpha$, en remplaçant simplement $V^\alpha$ par $\dfrac{d}{d\tau}[\quad]^{\alpha\beta}$

$$\rightarrow \Big\| \quad F^{\alpha\beta} = \left.\frac{e}{V\cdot(x-r)}\frac{d}{d\tau}\frac{(x-r)^\alpha V^\beta - (x-r)^\beta V^\alpha}{V\cdot(x-r)}\right|_{\tau=\tau_0}$$

($r^\alpha$ et $V^\alpha$ dépendent de $\tau$)

<u>expression de $\vec{E}$ et $\vec{B}$</u>

$(x-r)^\alpha = (R, R\vec{n})$ $\qquad$ $V^\alpha = (\gamma c, \gamma c\vec{\beta})$

$\dfrac{dV^\alpha}{d\tau} = \left(c\dfrac{d}{d\tau}\gamma,\ c\dfrac{d}{d\tau}(\gamma\vec{\beta})\right)$ $\qquad$ $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ $\qquad$ $\dfrac{d\gamma}{d\tau} = -\dfrac{1}{2}\left(-2\vec{\beta}\cdot\dfrac{d\vec{\beta}}{d\tau}\right)(1-\beta$

$= \vec{\beta}\cdot\dfrac{d\vec{\beta}}{d\tau}\gamma^3$

$= \gamma^4\vec{\beta}\cdot d\vec{\beta} = \gamma^4\vec{\beta}.$

$$\frac{d}{d\tau}\gamma\vec{\beta} = \gamma^4(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})\,\vec{\beta} + \gamma^2\dot{\vec{\beta}} \qquad \text{d'où} \quad \frac{dV^\alpha}{d\tau} = \left[c\gamma^4\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}},\; c\gamma^2\dot{\vec{\beta}} + c\gamma^4\vec{\beta}\,(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})\right]$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[V\cdot(x-r)\right] = (x-r)\cdot\frac{dV}{d\tau} - V\cdot V = (x-r)\cdot\frac{dV}{d\tau} - c^2$$

$$E^i = F^{i0}$$

$$B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}$$

$$F^{\alpha\beta} = \frac{e}{V\cdot(x-r)}\left[\overbrace{\frac{-V^\alpha V^\beta + V^\beta V^\alpha}{V\cdot(x-r)}}^{0} + \frac{(x-r)^\alpha}{V\cdot(x-r)}\frac{dV^\beta}{d\tau} - \frac{(x-r)^\beta}{V\cdot(x-r)}\frac{dV^\alpha}{d\tau}\right.$$

$$\left. + \frac{(x-r)^\alpha V^\beta - (x-r)^\beta V^\alpha}{[V\cdot(x-r)]^2}\left(c^2 - (x-r)_\alpha\cdot\frac{dV^\alpha}{d\tau}\right)\right]$$

$$\text{donc } E^i = F^{i0} = e\,\frac{R\vec{n}\,c\gamma^4\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}} - R\left(c\gamma^2\dot{\vec{\beta}} + c\gamma^4\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})\right)}{c^2\gamma^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2R^2}$$

$$+ \frac{e}{c^3\gamma^3R^3(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\left(R\vec{n}\,\gamma c - R\gamma c\vec{\beta}\right)\left(c^2 - Rc\gamma^4\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}} + Rc\gamma^2\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}} + Rc\gamma^4\vec{n}\cdot\vec{\beta}\,(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})\right)$$

$$= \frac{e}{c}\,\frac{\gamma^2\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}}\,(\vec{n}-\vec{\beta})}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2R} - \frac{e}{c}\,\frac{\dot{\vec{\beta}}}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2R} + \frac{e(\vec{n}-\vec{\beta})}{c^2\gamma^2R^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\left(c^2 - Rc\gamma^4\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}}(1\ldots + Rc\gamma^2\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\right)$$

$$= e\,\frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{\gamma^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3R^2} + \frac{e}{c}\,\frac{\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\,(\vec{n}-\vec{\beta})}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3R} - \frac{e}{c}\,\frac{\dot{\vec{\beta}}}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2R}$$

or $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$

donc $\vec{n}\wedge\left((\vec{n}-\vec{\beta})\wedge\dot{\vec{\beta}}\right) = \vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\,(\vec{n}-\vec{\beta}) - \vec{n}\cdot(\vec{n}-\vec{\beta})\,\dot{\vec{\beta}} = \vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\,(\vec{n}-\vec{\beta}) - (1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})$

$$\text{donc } \quad \vec{E}(\vec{r},t) = e\,\frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{\gamma^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3R^2}\bigg|_{Ret} + \frac{e}{c}\,\frac{\vec{n}\wedge\{(\vec{n}-\vec{\beta})\wedge\dot{\vec{\beta}}\}}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3R}\bigg|_{Ret}$$

Calcul du $\vec{B}$ :

$$B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}$$

$$F^{jk} = \frac{e}{V\cdot(x-r)}\left[\frac{R}{V\cdot(x-r)}\left(n^j\left(c\gamma^2\dot{\beta}^k + c\gamma^4\beta^k(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})\right) - n^k\left(c\gamma^2\dot{\beta}^j + c\gamma^4\beta^j(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}}\right.\right.\right.$$

$$+\frac{R\gamma c}{(V\cdot(x-r))^2}\left(n^j\beta^k - n^k\beta^j\right)\left(c^2 - Rc\gamma^4\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}}\,(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}) + Rc\gamma^2\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\right.$$

$$= e\left[\frac{n^j\dot{\beta}^k - n^k\dot{\beta}^j + \gamma^2\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}}\,(n^j\beta^k - n^k\beta^j)}{cR(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2}\right. \quad 0$$

$$+\frac{1}{\gamma^2 c R^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\left(n^j\beta^k - n^k\beta^j\right)\left(c - R\gamma^4\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}}\,(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}) + R\gamma^2\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\right)\Bigg]$$

donc
$$B^i = -\frac{e}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{n^j\beta^k - n^k\beta^j}{\gamma^2R^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3} - \frac{e}{c}\frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\frac{n^j\beta^k - n^k\beta^j}{R(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})}\,\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}$$

$$-\frac{e}{c}\frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\frac{n^j\beta^k}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^2R}$$

$$= \varepsilon_{ijk}\,n^jE^k$$

D'où $\| \vec{B} = \vec{n}\wedge\vec{E}\,\big|_{ret}$