TD n°8

Zitterbewegung et transformation de Foldy-Wouthuysen

I - Opérateur vitesse

1°) $\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = -i[\vec r, H]$ $\qquad H = \vec\alpha\vec p + \beta m$

$$= -i[\vec r, \vec\alpha\vec p] = -i[\vec r, \alpha^i p^i] = -i\alpha^i[\vec r, p^i] = \vec\alpha$$

$\boxed{\frac{d\vec r}{dt} = \vec\alpha}$ valeurs propres de $\vec\alpha = \pm 1$ (car $\alpha^2 = 1$ et trace $\alpha^i = 0$)

$[\alpha_i, \alpha_j] \neq 0$ pour $i \neq j$

donc la vitesse ne peut prendre que les deux valeurs $\pm c$ et de plus ses différentes composantes ne commutent pas!

2°) a) $\langle\psi_1|\vec P|\psi_2\rangle = \int d^3x\, e^{i(E_1x^0 - \vec k_1\cdot\vec x)}\, (-i\partial_{\vec x})\, e^{-i(E_2x^0 - \vec k_2\cdot\vec x)}\, u_1^+(k_1)\, u_2(k_2)$

car $\psi = e^{-i(Ex^0 - \vec k\cdot\vec x)}\, u(k)$ (u représente ici $u^{(\alpha)}$ ou $v^{(\alpha)}$)

$$\langle\psi_1|\vec P|\psi_2\rangle = \vec k_2 \int d^3x\, e^{i(E_1x^0 - \vec k_1\cdot\vec x)}\, e^{-i(E_2x^0 - \vec k_2\cdot\vec x)}\, u_1^+(k_1)\, u_2(k_2)$$

$$= \vec k_2 \underbrace{\int d^3x\, e^{i(E_1-E_2)x^0}\, e^{i(\vec k_2 - \vec k_1)\cdot\vec x}\, u_1^+(k_1)\, u_2(k_2)}_{\langle\psi_1|\psi_2\rangle}$$

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = (2\pi)^3\, \delta^3(\vec k_1 - \vec k_2)\, e^{i(E_1-E_2)x^0}\, u_1^+(k_1)\, u_2(k_1) = 0 \quad \text{si } E_1 \neq E_2$$

(en effet $E_1 = \pm E_2$ et pour $E_1 = -E_2$, $u_1^+(k_1)\, u_2(k_1) = 0$)

b) $\{\vec\alpha, H\} = 2\vec p$

donc $\langle\psi_1|\vec\alpha H|\psi_2\rangle + \langle\psi_1|H\vec\alpha|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|2\vec P|\psi_2\rangle$

$E_1\langle\psi_1|\vec\alpha|\psi_2\rangle + E_2\langle\psi_1|\vec\alpha|\psi_2\rangle = 0$ si $E_1 \neq E_2$ ou $0, \pm E_2$

$(E_1 + E_2)\langle\psi_1|\vec\alpha|\psi_2\rangle = 0$ donc $\langle\psi_1|\vec\alpha|\psi_2\rangle = 0$ si $\begin{cases} E_1 \neq -E_2 \\ E_1 \neq E_2 \end{cases}$

$$\langle\psi_1|\frac{\vec P}{H}|\psi_2\rangle = \frac{1}{E_2}\langle\psi_1|\vec P|\psi_2\rangle = 0 \quad \text{si } E_1 \neq E_2$$

si $E_1 = E_2 \neq 0$ $\quad 2E_1 \langle \psi_1 | \vec{\alpha} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | 2\vec{p} | \psi_2 \rangle$

$$\langle \psi_1 | \vec{\alpha} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \frac{\vec{p}}{E_1} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \frac{\vec{p}}{H} | \psi_2 \rangle$$

donc $\boxed{\text{si } E_1 \neq -E_2, \quad \langle \psi_1 | \vec{\alpha} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \frac{\vec{p}}{H} | \psi_2 \rangle}$

3°) $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)^k = -i [\vec{L}, H]^k = -i [\vec{r} \wedge \vec{p}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m]^k$

$$= -i \alpha^{j'} (\varepsilon_{ijk} r^i p^j p^{j'} - \varepsilon_{ijk} p^{j'} r^i p^j)$$

$$= -i \alpha^{j'} \varepsilon_{ijk} (r^i p^j p^{j'} - r^i p^{j'} p^j + i \delta^{ij'} p^j)$$

$$= \alpha^{j'} \varepsilon_{ijk} \delta^{ij'} p^j = (\vec{\alpha} \wedge \vec{p})^k$$

donc $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\alpha} \wedge \vec{p}}$

$\frac{d}{dt} \langle \psi_1 | \vec{L} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \frac{d\vec{L}}{dt} | \psi_2 \rangle$ (rep. de Heisenberg)

$$= \langle \psi_1 | \vec{\alpha} \wedge \vec{p} | \psi_2 \rangle$$

$\frac{d}{dt} \langle \psi_1 | L_k | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \varepsilon_{ijk} \alpha_i p_j | \psi_2 \rangle$

$$= \int \varepsilon_{ijk} \langle \psi_1 | \alpha_i | \psi \rangle \langle \psi | p_j | \psi_2 \rangle$$

$$= \varepsilon_{ijk} \langle \psi_1 | \alpha_i | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | p_j | \psi_2 \rangle$$

Comme E_1 et $E_2 > 0$, $\langle \psi_1 | \vec{\alpha} | \psi_2 \rangle = 0 \iff E_1 \neq E_2$

si $|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$: $\frac{d}{dt} \langle \psi_1 | L_k | \psi_1 \rangle = \varepsilon_{ijk} \langle \psi_2 | \alpha_i | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | p_j | \psi_2 \rangle$

$$= \frac{1}{E_2} \varepsilon_{ijk} \langle \psi_2 | p_i | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | p_j | \psi_2 \rangle$$

$$= 0$$

donc $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \text{ si l'on se restreint aux états d'énergie} > 0}$

4°) $\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = -i[\vec{\alpha}, H] = -i[\vec{\alpha}, \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m] = -i\vec{\alpha}H + iH\vec{\alpha}$

$$= -i\vec{\alpha}H + i(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)\vec{\alpha} = -i\vec{\alpha}H - i\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}) + 2i\vec{p} - i\alpha\beta m$$

$$= -2i\vec{\alpha}H + 2i\vec{p} = -2i(\vec{\alpha}H - \vec{p})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\alpha}H - \vec{p}) = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}H = -2i(\vec{\alpha}H - \vec{p})H = 2iH(\vec{\alpha}H - \vec{p})$$

car $\{\vec{\alpha}H - \vec{p}, H\} = \vec{\alpha}HH + H\vec{\alpha}H - 2\vec{p}H = H\vec{\alpha}H + 2(\vec{\alpha}H - \vec{p})H + H\vec{\alpha}H - 2\vec{p}H$

$= 2(H\vec{\alpha}H + \vec{\alpha}H^2 - 2\vec{p}H) = 2\{\vec{\alpha}H - \vec{p}, H\}$ donc $\{\vec{\alpha}H - \vec{p}, H\} = 0$ (d'après $[\vec{\alpha}, H] = 2(\vec{\alpha}H - \vec{p})$)

$$\vec{\alpha}H - \vec{p} = \vec{K}e^{-2iHt} = e^{2iHt}\vec{K}'$$

$\underline{t=0}$ $\quad \vec{\alpha}(0)H - \vec{p} = \vec{K}$

donc $\vec{\alpha}H - \vec{p} = (\vec{\alpha}(0)H - \vec{p})e^{-2iHt} = e^{2iHt}(\vec{\alpha}(0)H - \vec{p})$

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{\vec{p}}{H} + \left(\vec{\alpha}(0) - \frac{\vec{p}}{H}\right)e^{-2iHt} = \frac{\vec{p}}{H} + e^{2iHt}\left(\vec{\alpha}(0) - \frac{\vec{p}}{H}\right)}$$

(car $[\vec{p}, H] = 0$)

$\Rightarrow$ $\underline{\vec{\alpha} \text{ est hermitique}}$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha}$ donc $\vec{r} = \vec{r}(0) + \frac{\vec{p}}{H}t + \left(\vec{\alpha}(0) - \frac{\vec{p}}{H}\right)\frac{i}{2H}(e^{-2iHt} - 1)$

$$\nu = 2E > 2\frac{mc^2}{\hbar} \simeq 2.10^{21}\,\text{Hz}$$

$\langle \psi_1 | \vec{r} | \psi_2 \rangle = ?$

terme oscillant : $\frac{i}{2H}(e^{-2iHt} - 1)$ diagonalisé par ψ_2

$$\langle \psi_1 | \vec{\alpha}(0) - \frac{\vec{p}}{H} | \psi_2 \rangle = 0 \text{ si } E_1 \neq -E_2$$

donc le terme d'oscillation fait intervenir les états d'énergie opposée.

5°) $\psi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\sum_{\alpha=1,2} b(p,\alpha)\,u^{(\alpha)}(p)\,e^{-ipx}$ $\qquad$ rem. $\frac{d^3p}{E}$ = mesure invariante de Lorentz

a) $\langle \psi^+ | \psi^+ \rangle = \int d^3x\, j^{(+)0}(t,x) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^6} \iint d^3p\, d^3p' \frac{m^2}{EE'} \sum b^*(p,\alpha)\, b(p',\alpha')$

$$\times\, u^{(\alpha)+}(p)\, u^{(\alpha')}(p')\, e^{i(E-E')t - i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}}$$

$$= \sum_\alpha \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}|b(p,\alpha)|^2 = 1 \qquad \text{car } u^{(\alpha)+}(p)\, u^{(\alpha')}(p) = \frac{E}{m}\delta^{\alpha\alpha'}$$

en effet $u^{(\alpha)+}(p)\, u^{(\alpha')}(p) = \bar{u}^{(\alpha)}\gamma^0 u^{(\alpha')} = \bar{u}^{(\alpha)}\gamma^0 \cancel{p} u^{(\alpha')} + \bar{u}^{(\alpha)}\cancel{p}\gamma^0 u^{(\alpha')}$

$$\bar{u}^{(\alpha)} \gamma^0 u^{(\alpha')} = \bar{u}^{(\alpha)} \frac{\{\gamma^0, \not{p}\}}{2m} u^{(\alpha')} = 2\bar{u}^{(\alpha)} \frac{p^0}{2m} u^{(\alpha')} = \frac{E}{m} \bar{u}^{(\alpha)} u^{(\alpha')} = \frac{E}{m} \delta^{\alpha\alpha'}$$

(de même $\bar{v}^{(\alpha)} \gamma^0 v^{(\alpha')} = -\frac{p^0}{m} \bar{v}^{(\alpha)} v^{(\alpha')} = \frac{E}{m} \delta^{\alpha\alpha'}$)

b) $$\vec{J}^{(+)} = \int d^3x \, \vec{j}^{(+)}(t, \vec{x})$$

$$= \int \frac{d^3x}{(2\pi)^6} \int d^3p \, d^3p' \, \frac{m^2}{EE'} \sum_{\alpha,\alpha'} b^*(p,\alpha) \, b(p',\alpha') \, u^{(\alpha)+}(p) \, \vec{\alpha} \, u^{(\alpha')}(p')$$
$$\times e^{i(E-E')t - i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha,\alpha'} \frac{m^2}{E^2} b^*(p,\alpha) \, b(p,\alpha') \, u^{(\alpha)+}(p) \, \vec{\alpha} \, u^{(\alpha')}(p)$$

c) $$\bar{u}^{(\alpha)}(p) \left[\not{a} (\not{q} - m) + (\not{p} - m) \not{a} \right] u^{(\beta)}(q) = 0$$

$$= -2m \, \bar{u}^{(\alpha)}(p) \not{a} \, u^{(\beta)}(q) + \bar{u}^{(\alpha)}(p) \left(\underbrace{\left\{ \frac{\not{p}+\not{q}}{2}, \not{a} \right\}}_{\frac{1}{2} \cdot 2 (p^\mu + q^\mu) a_\mu} + \underbrace{\left[\frac{\not{p}-\not{q}}{2}, \not{a} \right]}_{-i\sigma^{\mu\nu}(p-q)_\mu a_\nu \, = \, i\sigma^{\mu\nu}(p-q)_\nu a_\mu} \right) u^{(\beta)}(q)$$

on différentie par rapport à a_μ

$$\rightarrow \boxed{\bar{u}^{(\alpha)}(p) \gamma^\mu u^{(\beta)}(q) = \frac{1}{2m} \bar{u}^{(\alpha)}(p) \left[(p+q)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p-q)_\nu \right] u^{(\beta)}(q)}$$

d) $$\vec{J}^{(+)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha,\alpha'} \frac{m^2}{E^2} b^*(p,\alpha) \, b(p,\alpha') \underbrace{\bar{u}^{(\alpha)}(p) \vec{\gamma} \, u^{(\alpha')}(p)}_{\frac{\vec{p}}{m} \underbrace{\bar{u}^{(\alpha)}(p) u^{(\alpha')}(p)}_{\delta^{\alpha\alpha'}}}$$

$$= \sum_\alpha \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} |b(p,\alpha)|^2 \frac{\vec{p}}{E} = \left\langle \frac{\vec{p}}{E} \right\rangle$$

e) $$\psi(0, \vec{x}) = \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-\vec{x}^2/2d^2} w \qquad w = \begin{pmatrix} \Phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_\alpha \left[b(p,\alpha) u^{(\alpha)}(p) e^{-ipx} + d^*(p,\alpha) v^{(\alpha)}(p) e^{ipx} \right]$$

$$\psi(0, \vec{x}) = \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-\vec{x}^2/2d^2} w = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_\alpha \left[b(p',\alpha) u^{(\alpha)}(p) e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} + d^*(p',\alpha) v^{(\alpha)}(p) e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \right.$$

$$\int d^3x\, \psi(0,\vec{x})\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} = \frac{(2\pi d^2)^{3/2}}{(\pi d^2)^{3/4}}\, e^{-p^2d^2/2}\, w$$

$$= (4\pi d^2)^{3/4}\, e^{-p^2d^2/2}\, w$$

$$= \frac{m}{E} \sum_\alpha b(p,\alpha)\, u^{(\alpha)}(p) + d^*(\tilde{p},\alpha)\, v^{(\alpha)}(\tilde{p})$$

$\bar{v}(\tilde{p},\sigma')\gamma^0 u(p,\sigma) = \bar{u}(p,\sigma')\gamma^0 v(\tilde{p},\sigma) = 0$ (cf cours D-36)

avec $\tilde{p} = (p^0, -\vec{p})$

et
$$\left.\begin{aligned} u^{(\alpha)+}(p)\, u^{(\alpha')}(p) &= \delta^{\alpha\alpha'}\frac{E}{m} \\ v^{(\alpha)+}(p)\, v^{(\alpha')}(p) &= \delta^{\alpha\alpha'}\frac{E}{m} \end{aligned}\right\}$$

donc :
$$\left\| \begin{aligned} b(p,\alpha) &= (4\pi d^2)^{3/4}\, e^{-\vec{p}^2d^2/2}\, u^{(\alpha)+}(p)\, w \\ d^*(p,\alpha) &= (4\pi d^2)^{3/4}\, e^{-\vec{p}^2d^2/2}\, v^{(\alpha)+}(p)\, w \end{aligned}\right.$$

or
$$u^{(\alpha)}(k) = \left(\frac{E+mc}{2mc}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \varphi \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc}\varphi \end{pmatrix}$$

$$v^{(\alpha)}(k) = \left(\frac{E+mc}{2mc}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc}\chi \\ \chi \end{pmatrix}$$

donc $\dfrac{d^*}{b} \sim \dfrac{\|\vec{p}\|}{E+mc} \sim \dfrac{p}{\sqrt{p^2+m^2}+m}$ non négligeable pour $p \sim m$

* si le paquet d'onde est étalé sur des tailles de l'ordre de $d \gg \frac{1}{m}$, la contribution correspondant à $p \sim m$ donne $p^2d^2 \gg 1$ → contributions d'énergie négative négligeables → la théorie à une particule est satisfaisante.
* si l'on veut localiser la particule sur des échelles de l'ordre de $d \lesssim \frac{1}{m}$, $\frac{d^*}{b}$ devient important → solutions d'énergie négative non négligeables

Cf. Heisenberg : $\Delta x . \Delta p \sim \hbar$ → pour $\Delta x \lesssim \lambda = \frac{\hbar}{mc}$ ($\lambda = 3{,}8 . 10^{-13}$ m pour e^-)

$\Delta p \sim mc$ → création de paires possible

Condition de normalisation:

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_\alpha \left(|b(p,\alpha)|^2 + |d(p,\alpha)|^2 \right)$$

<u>Courant:</u> $J^i(t) = \int d^3x \; j^i(t,\vec{x})$

$$= \int \frac{d^3x}{(2\pi)^6} \int d^3p \, d^3p' \frac{m^2}{EE'} \Big[\sum_\alpha b^*(p,\alpha) u^{(\alpha)\dagger}(p) e^{+ip\cdot x} + d(p,\alpha) v^{(\alpha)\dagger}(p) e^{-ip\cdot x} \Big]$$

$$\alpha^i \Big[\sum_{\alpha'} b(p',\alpha') u^{(\alpha')}(p') e^{-ip'\cdot x} + d^*(p',\alpha') v^{(\alpha')}(p') e^{+ip'\cdot x} \Big]$$

$$= \int \frac{d^3x}{(2\pi)^6} \int d^3p \, d^3p' \frac{m^2}{EE'} \sum_{\alpha,\alpha'} \Big[b^*(p,\alpha) b(p',\alpha') u^{(\alpha)\dagger}(p) \alpha^i u^{(\alpha')}(p') e^{i(E-E')t - i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}}$$

$$+ d(p,\alpha) d^*(p',\alpha') v^{(\alpha)\dagger}(p) \alpha^i v^{(\alpha')}(p') e^{-i(E-E')t + i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}}$$

$$+ d(p,\alpha) b(p',\alpha') v^{(\alpha)\dagger}(p) \alpha^i u^{(\alpha')}(p') e^{-i(E+E')t + i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}}$$

$$+ b^*(p',\alpha') d^*(p,\alpha) u^{(\alpha')\dagger}(p') \alpha^i v^{(\alpha)}(p) e^{i(E+E')t - i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} \Big] \leftarrow \begin{pmatrix} p \leftrightarrow p' \\ \alpha \leftrightarrow \alpha' \end{pmatrix}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{E^2} \Big\{ \frac{p^i}{m} \sum_\alpha \big[|b(p,\alpha)|^2 + |d(p,\alpha)|^2 \big]$$

$$+ b(\tilde{p},\alpha') d(p,\alpha) \bar{v}^{(\alpha)}(p) \gamma^i u^{(\alpha')}(\tilde{p}) e^{-2iEt} + b^*(\tilde{p},\alpha') d^*(p,\alpha) \bar{u}^{(\alpha')}(\tilde{p}) \gamma^i v^{(\alpha)}(p) e^{2iEt}$$

car en faisant $\vec{p}' \to -\vec{p}'$, soit $p' \to \tilde{p}'$, les 3ièmes et 4ièmes termes conduisent à

$$v^{(\alpha)\dagger}(p) \alpha^i u^{(\alpha')}(\tilde{p}) = \bar{v}^{(\alpha)}(p) \gamma^i u^{(\alpha')}(\tilde{p})$$

or $\bar{v}^{(\alpha)}(p) \left[\not{a} (\not{q} - m) - (\not{p} + m) \not{a} \right] u^{(\beta)}(q) = 0$

$$= -2m \bar{v}^{(\alpha)}(p) \not{a} u^{(\beta)}(q) + \bar{v}^{(\alpha)}(p) \left(\left\{ \frac{-\not{p} + \not{q}}{2}, \not{a} \right\} + \left[\frac{-\not{p} - \not{q}}{2}, \not{a} \right] \right) u^{(\beta)}(q)$$

donc $\bar{v}^{(\alpha)}(p) \left[(-p+q)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (-p-q)_\nu \right] u^{(\beta)}(q) = 2m \, \bar{v}^{(\alpha)}(p) \gamma^\mu u^{(\beta)}(q)$

d'où $\boxed{\bar{v}^{(\alpha)}(p) \gamma^\mu u^{(\beta)}(q) = \frac{1}{2m} \bar{v}^{(\alpha)}(p) \left[(-p+q)^\mu - i\sigma^{\mu\nu} (p+q)_\nu \right] u^{(\beta)}(q)}$ ①

donc $\bar{v}^{(\alpha)}(p)\gamma^i u^{(\alpha')}(\tilde{p}) = \frac{1}{2m}\bar{v}^{(\alpha)}(p)\Big[(\underbrace{-p+\tilde{p}}_{-2p^i})^i - i\sigma^{i\nu}(\underbrace{p+\tilde{p}}_{\delta_{0\nu}2E})_\nu\Big]u^{(\beta)}(\tilde{p})$

de même $\bar{u}^{(\alpha)}(p)\left[\not{x}(\not{q}+m) - (\not{p}-m)\not{x}\right]v^{(\beta)}(q) = 0$

$$= 2m\,\bar{u}^{(\alpha)}(p)\not{x}\,v^{(\beta)}(q) + \bar{u}^{(\alpha)}(p)\left[\left\{\frac{-\not{p}+\not{q}}{2},\not{x}\right\} + \left[\frac{-\not{p}-\not{q}}{2},\not{x}\right]\right]v^{(\beta)}(q)$$

donc $\| \bar{u}^{(\alpha)}(p)\gamma^\mu v^{(\beta)}(q) = -\frac{1}{2m}\bar{u}^{(\alpha)}(p)\left[(-p+q)^\mu - i\sigma^{\mu\nu}(p+q)_\nu\right]v^{(\beta)}(q)$ ②

rem. $\left(\bar{v}^{(\alpha)}(p)\gamma^\mu u^{(\beta)}(q)\right)^+ = u^{(\beta)+}(q)\,\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^0 v^{(\alpha)}(p)$

$$= \bar{u}^{(\beta)}(q)\gamma^\mu v^{(\alpha)}(p)$$

donc en faisant $\begin{pmatrix} p \leftrightarrow q \\ \alpha \leftrightarrow \beta \end{pmatrix}$ dans ① et en transconjugant le membre de droite de ①

on a ②.

Donc $\bar{u}^{(\alpha')}(\tilde{p})\gamma^i v^{(\alpha)}(p) = -\frac{1}{2m}\bar{u}^{(\alpha')}(\tilde{p})\Big[(\underbrace{-\tilde{p}+p}_{-2p^i})^i - i\sigma^{i\nu}(\underbrace{\tilde{p}+p}_{\delta_{0\nu}2E})_\nu\Big]v^{(\alpha)}(p)$

$$= \frac{p^i}{m}\bar{u}^{(\alpha')}(\tilde{p})v^{(\alpha)}(p) - \frac{E}{m}\bar{u}^{(\alpha')}(\tilde{p})\,i\sigma^{0i}v^{(\alpha)}(p)$$

les termes 3 et 4 donnent donc :

$$\sum_{\alpha,\alpha'} b(\tilde{p},\alpha')d(p,\alpha)\bar{v}^{(\alpha)}(p)\,i\sigma^{0i}\frac{E}{m}u^{(\alpha')}(\tilde{p}) - b^*(\tilde{p},\alpha')d^*(p,\alpha)\bar{u}^{(\alpha')}(\tilde{p})\,i\sigma^{0i}v^{(\alpha)}(p)\frac{E}{m}$$

$$-\frac{p^i}{m}\Big[\underbrace{b^*(\tilde{p},\alpha')d^*(p,\alpha)\,\bar{u}^{(\alpha')}(\tilde{p})v^{(\alpha)}(p)}_{①} - \underbrace{b(\tilde{p},\alpha')d(p,\alpha)\bar{v}^{(\alpha)}(p)u^{(\alpha')}(\tilde{p})}_{②}\Big]$$

$b^*(\tilde{p},\alpha')d^*(p,\alpha) = (4\pi d^2)^{3/2}e^{-p^2d^2}\; w^+ u^{(\alpha')}(p)\,v^{(\alpha)+}(p)\,w$

$b(\tilde{p},\alpha')d(p,\alpha) = (4\pi d^2)^{3/2}e^{-p^2d^2}\; w^+ v^{(\alpha)}(p)\,u^{(\alpha')+}(p)\,w$

donc ① $= w^+ u^{(\alpha')}(\tilde{p})\bar{u}^{(\alpha')}(\tilde{p})\,v^{(\alpha)}(p)v^{(\alpha)+}(p)\,w$

or $w = \begin{pmatrix}\phi\\0\end{pmatrix}$ donc $\gamma_0 w = w$ d'où $\sum_\alpha v^{(\alpha)}(p)v^{(\alpha)+}(p)w$

$$= \sum_\alpha v^{(\alpha)}(p)\bar{v}^{(\alpha)}(p)\,w$$

$$= -\Lambda_-(p)\,w$$

d'où ① $= -w^+\Lambda_+(\tilde{p})\Lambda_-(p)\,w$

$$②=①^*=-w^+\Lambda_-(p)\Lambda_+(\tilde{p})w$$

donc ① $-$ ② $=$ $w^+\underbrace{\left(\Lambda_-(p)\Lambda_+(\tilde{p})-\Lambda_+(\tilde{p})\Lambda_-(p)\right)}_{A}w$

$$A=\frac{-\not{p}+m}{2m}\frac{\tilde{\not{p}}+m}{2m}-\frac{\tilde{\not{p}}+m}{2m}\frac{-\not{p}+m}{2m}=\frac{1}{4m^2}\left[-\not{p}+m,\tilde{\not{p}}+m\right]=-\frac{1}{4m^2}\left[\not{p},\tilde{\not{p}}\right]$$

$$=-\frac{1}{4m^2}\left[p^0\gamma_0+p^i\gamma_i,\ p^0\gamma_0-p^i\gamma_i\right]=-\frac{2p^0p^i}{4m^2}\left[\gamma_i,\gamma_0\right]=-\frac{p^0p^i}{2m^2}\left[\gamma_i,\gamma_0\right]=\frac{p^0p^i}{m^2}i\sigma_{i0}$$

or σ_{i0} n'a pas d'éléments diagonaux donc $\underline{w^+\sigma_{i0}w=0}$

Ainsi : $J^i(t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\left\{\frac{p^i}{E}\sum_\alpha\left[|b(p,\alpha)|^2+|d(p,\alpha)|^2\right]+i\sum_{\alpha,\alpha'}\left[b^*(\tilde{p},\alpha)d^*(p,\alpha')e^{2iEt}\bar{u}^{(\alpha)}(\tilde{p})\sigma^{i0}v^{(\alpha')}(p)\right.\right.$
$\left.\left.-b(\tilde{p},\alpha)d(p,\alpha')e^{-2iEt}\bar{v}^{(\alpha')}(p)\sigma^{i0}u^{(\alpha)}(\tilde{p})\right]\right.$

1er terme : vitesse de groupe
2ème terme : terme oscillant

II – Transformation de Foldy-Wouthuysen

1°) $\mathbb{1}=\begin{pmatrix}I&0\\0&I\end{pmatrix}$ $\quad\gamma_0=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix}$ $\quad\vec{\sigma}=\frac{1}{2i}\vec{\alpha}\wedge\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}\vec{\sigma}&0\\0&\vec{\sigma}\end{pmatrix}=\vec{\Sigma}$

(car $(\vec{\alpha}\wedge\vec{\alpha})^k=\epsilon_{ijk}\alpha^i\alpha^j=\epsilon_{ijk}\begin{pmatrix}0&\sigma^i\\\sigma^i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\sigma^j\\\sigma^j&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\epsilon_{ijk}\sigma^i\sigma^j&0\\0&\epsilon_{ijk}\sigma^i\sigma^j\end{pmatrix}$

$\epsilon^{ijk}\sigma_i\sigma_j=i\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk'}\sigma_{k'}=2i\sigma_k$ $\quad=\begin{pmatrix}\sigma^k&0\\0&\sigma^k\end{pmatrix})$

$$\gamma_0\vec{\sigma}=\begin{pmatrix}\vec{\sigma}&0\\0&-\vec{\sigma}\end{pmatrix}$$

Donc ces matrices sont paires

$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}0&\vec{\sigma}\\\vec{\sigma}&0\end{pmatrix}$ $\quad\vec{\gamma}=\gamma_0\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}0&\vec{\sigma}\\-\vec{\sigma}&0\end{pmatrix}$ $\quad\gamma_5=\begin{pmatrix}0&I\\I&0\end{pmatrix}$ $\quad\gamma_0\gamma_5=\begin{pmatrix}0&I\\-I&0\end{pmatrix}$

sont impaires.

$\left.\begin{array}{l}\text{paire}\times\text{paire}=\text{paire}\\\text{impaire}\times\text{impaire}=\text{impaire}\\\text{impaire}\times\text{paire}=\text{impaire}\end{array}\right\}$ immédiat par inspection

$[\gamma_0,\mathbb{1}]=[\gamma_0,\gamma_0]=0$ $\qquad[\gamma_0,\vec{\Sigma}]=0$ $\quad$ (car $\vec{\Sigma}=I\otimes\vec{\sigma}$ et $\gamma_0=\sigma^3\otimes I$)

$[\gamma_0, \gamma_0 \vec{\Sigma}] = 0$ puisque $[\gamma_0, \vec{\Sigma}] = 0$

Donc $\beta = \gamma_0$ commute avec les matrices paires

$\{\gamma_0, \vec{\alpha}\} = 0$ $\{\gamma_0, \vec{\gamma}\} = 0$ par construction de l'algèbre de Clifford

$\gamma_5 = \sigma^1 \otimes I$ $\gamma_0 = \sigma^3 \otimes I$ donc $\{\gamma_5, \gamma_0\} = 0$ puisque $\{\sigma^1, \sigma^3\} = 0$

$\gamma_0 \gamma_5 = -i\sigma^2 \otimes I$ donc de même $\{\gamma_0, \gamma_0\gamma_5\} = 0$ puisque $\{\sigma^2, \sigma^3\} = 0$

En écrivant toute matrice sous la forme $A = \underbrace{\frac{1}{2}[A + \beta A \beta]}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - \beta A \beta]}_{\text{impaire}}$

on a la décomposition cherchée : $[\beta, A + \beta A \beta] = \beta A + A\beta - A\beta - A\beta = 0$ → paire

$\{\beta, A - \beta A \beta\} = \beta A - A\beta + A\beta - \beta A = 0$ → impaire

2°) a) $H - i\partial t \xrightarrow{S} e^{iS}(H - i\partial t)e^{-iS} = H' - i\partial t = e^{iS} H e^{-iS} - ie^{iS}\partial_t e^{-iS} - i\partial t$

donc $H' = e^{iS} H e^{-iS} - ie^{iS} \partial_t (e^{-iS})$

b) $S = \frac{-i}{2m} \beta \vec{\alpha}.\vec{p}\, w\left(\frac{p}{m}\right)$

$e^{iS} = e^{\frac{\beta}{2m} \vec{\alpha}.\vec{p}\, w\left(\frac{p}{m}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\beta}{2m} \vec{\alpha}\vec{p}\, w\left(\frac{p}{m}\right)\right]^k$

$\underline{k = 2k'}$: $\left(\frac{\beta}{2m} \vec{\alpha}.\vec{p}\, w\left(\frac{p}{m}\right)\right)^{2k'} = \left(\frac{-p}{2m}\right)^{2k'} w^{2k'}\left(\frac{p}{m}\right)$

$\underline{k = 2k'+1}$: $\left[\frac{\beta}{2m} \vec{\alpha}\vec{p}\, w\left(\frac{p}{m}\right)\right)^{2k'+1} = \left(\frac{-p}{2m}\right)^{2k'} \frac{\beta \vec{\alpha}\vec{p}}{2m} w^{2k'+1}\left(\frac{p}{m}\right)$

car $(\beta\vec{\alpha}\vec{p})^2 = \beta\vec{\alpha}\vec{p}\beta\vec{\alpha}.\vec{p} = -\beta^2 \vec{\alpha}\vec{p}\,\vec{\alpha}.\vec{p} = -p^2$

d'où $\boxed{e^{iS} = \cos\left[\frac{p}{2m} w\left(\frac{p}{m}\right)\right] + \frac{\beta\vec{\alpha}\vec{p}}{p} \sin\left[\frac{p}{2m} w\left(\frac{p}{m}\right)\right]}$

c) $H = \beta m + \vec{\alpha}\vec{p}$ Donc $H e^{-iS} = (\beta m + \vec{\alpha}\vec{p})\left[\cos \frac{p}{2m} w\left(\frac{p}{m}\right) - \frac{\beta\vec{\alpha}\vec{p}}{p} \sin\left(\frac{p}{2m} w\left(\frac{p}{m}\right)\right)\right]$

or $\beta\vec{\alpha} = -\vec{\alpha}\beta$ donc $He^{-iS} = \left(\cos\frac{p}{2m} w\left(\frac{p}{m}\right) + \frac{\beta\vec{\alpha}\vec{p}}{p} \sin\left(\frac{p}{2m} w\left(\frac{p}{m}\right)\right)\right.$

$\times (\beta m + \vec{\alpha}\vec{p}) = e^{iS} H$

d'où $e^{iS} H e^{-iS} = H'$ (car S ne dépend pas explicitement de t)

$$= e^{2iS} H$$

$$= \left(\cos \frac{p}{m} w + \beta \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p} \sin \frac{p}{m} w\right)(\beta m + \vec{\alpha}\cdot\vec{p})$$

$$= \beta\left[m \cos\left(\frac{p}{m}w\right) + p \sin\left(\frac{p}{m}w\right)\right] + \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p}\left[p\cos\left(\frac{pw}{m}\right) - m \sin\left(\frac{pw}{m}\right)\right]$$

car $\beta\, \vec{\alpha}\cdot\vec{p}\, \beta = -\vec{\alpha}\cdot\vec{p}$ et $(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}) = p^2$

Les termes impairs disparaissent donc à condition de choisir $\tan \frac{pw}{m} = \frac{p}{m}$

soit $w\left(\frac{p}{m}\right) = \frac{m}{p} \operatorname{Arctan}\left(\frac{p}{m}\right)$.

e) $\cos \frac{pw}{m} = + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \frac{pw}{m}}} = \frac{m}{\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}$ $\qquad \sin \frac{pw}{m} = \frac{p}{\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}$

(car $\frac{pw}{m} \in [0, \frac{\pi}{2}[$)

Donc $H' = \beta \dfrac{m^2+\vec{p}^2}{\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} = \beta\sqrt{\vec{p}^2+m^2} = \beta E(\vec{p})$

f) $\psi' = \phi' + \chi'$ $\qquad \phi' = \frac{1+\beta}{2}\psi'$ $\qquad \chi' = \frac{1-\beta}{2}\psi'$

$$H'\psi' = \beta E(\vec{p})\psi' = E(\vec{p})(\phi' - \chi') = H'(\phi' + \chi')$$

donc $\left\| \begin{array}{l} H'\phi' = E(\vec{p})\phi' \\ H'\chi' = -E(\vec{p})\chi' \end{array} \right.$

3°) a) $\psi_+(\vec{x})$ et $\psi_-(\vec{x})$ représentent respectivement les composantes d'énergie positive et négative

puisque $\beta m + \vec{\alpha}\cdot\vec{p} = H$ donc $\begin{cases} H\, u^{(\alpha)}(p) = E_p\, u^{(\alpha)}(p) \\ H\, v^{(\alpha)}(p) = -E_p\, v^{(\alpha)}(p) \end{cases}$ $\qquad \begin{array}{l} E_p = \sqrt{\vec{p}^2+m^2} = p^0 \\ E_p = \sqrt{\vec{p}^2+m^2} = -p^0 \end{array}$

d'où $\begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 + \frac{H}{E_p}\right] u^{(\alpha)}(p) = u^{(\alpha)}(p) \\ \frac{1}{2}\left[1 + \frac{H}{E_p}\right] v^{(\alpha)}(p) = 0 \end{cases}$

et $\begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 - \frac{H}{E_p}\right] u^{(\alpha)}(p) = 0 \\ \frac{1}{2}\left[1 - \frac{H}{E_p}\right] v^{(\alpha)}(p) = v^{(\alpha)}(p) \end{cases}$

iem) $P_+ = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{H}{E_p}\right]$ et $P_- = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{H}{E_p}\right]$ sont bien des projecteurs:

$$P_+^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2H}{E_p} + \underbrace{\frac{H^2}{E_p^2}}_{1}\right) = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{2H}{E_p}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{H}{E_p}\right) = P_+$$

$$P_-^2 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2H}{E_p} + \frac{H^2}{E_p^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{H}{E_p}\right) = P_-$$

$$P_+ P_- = 1 - \left(\frac{H}{E_p}\right)^2 = 0 \qquad P_+ + P_- = 1$$

b) $$e^{iS} = \cos\left[\frac{p}{2m} w\left(\frac{p}{m}\right)\right] + \beta\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p}\sin\left[\frac{p}{2m} w\left(\frac{p}{m}\right)\right]$$

or $\begin{cases} \cos x = \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^{1/2} \\ \sin x = \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^{1/2} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \cos\left[\dfrac{p}{2m} w\left(\dfrac{p}{m}\right)\right] = \left(\dfrac{E_p+m}{2E_p}\right)^{1/2} \\ \sin\left[\dfrac{p}{2m} w\left(\dfrac{p}{m}\right)\right] = \left(\dfrac{E_p-m}{2E_p}\right)^{1/2} \end{cases}$

puisque $\cos\frac{pw}{m} = \frac{m}{E_p}$

donc $$e^{iS} = \left(\frac{E_p+m}{2E_p}\right)^{1/2} + \beta\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p}\left(\frac{E_p-m}{2E_p}\right)^{1/2} = \frac{E_p+m}{[2E_p(E_p+m)]^{1/2}} + \frac{\beta\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{[2E_p(E_p+m)]^{1/2}}\underbrace{\frac{(E_p^2-m^2)^{1/2}}{p}}_{1}$$

$$\left\| \; e^{iS} = \frac{\beta\{\beta m + \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta E_p\}}{[2E_p(E_p+m)]^{1/2}} = \frac{\beta(H + \beta E_p)}{[2E_p(E_p+m)]^{1/2}}\right.$$

c) $$\psi'_+ = e^{iS}\psi_+ = \int \frac{\beta(H+\beta E_p)}{[2E_p(E_p+m)]^{1/2}}\,\frac{1}{2}\left(1 + \frac{H}{E_p}\right) u(p')\, e^{i\vec{p}'\vec{x}}\, d^3\vec{p}'$$

$$= \int \frac{1}{2}\frac{1}{[2E_{p'}(E_{p'}+m)]^{1/2}}\left(\beta H + \beta\underbrace{\frac{H^2}{E_{p'}}}_{\frac{E_{p'}^2}{E_p} = E_p} + E_{p'} + H\right) u(p')\, e^{i\vec{p}'\vec{x}}\, d^3\vec{p}'$$

or $$(1+\beta)\left(1 + \frac{H}{E_{p'}}\right) = 1 + \frac{H}{E_{p'}} + \beta + \beta\frac{H}{E_{p'}} = \frac{1}{E_{p'}}\left(E_{p'} + H + \beta E_{p'} + \beta H\right)$$

donc $$\psi'_+ = \int \frac{1+\beta}{2}\frac{E_{p'}}{[2E_{p'}(E_{p'}+m)]^{1/2}}\left(1 + \frac{H}{E_{p'}}\right) u(p')\, e^{i\vec{p}'\vec{x}}\, d^3\vec{p}'$$

$$\left\| \; \psi'_+ = \frac{1+\beta}{2}\int \frac{1}{2}\left(\frac{2E_{p'}}{E_{p'}+m}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{H}{E_{p'}}\right) u(p')\, e^{i\vec{p}'\vec{x}}\, d^3\vec{p}'\right.$$

$$1+\beta \int \frac{1}{\;}\left(\frac{2E_{p'}}{\;}\right)^{1/2}\left(\;\beta m + \vec{\alpha}\cdot\vec{p}'\right)\ldots$$

De même $\left\| \psi'_- = \frac{1+\beta}{2} \int \frac{1}{2} \left(\frac{2E_{p'}}{E_{p'}+m}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\beta m + \vec{\alpha}.\vec{p}'}{E_{p'}}\right) u(p') e^{i\vec{p}'.\vec{x}} d^3\vec{p}' \right.$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{Composantes supérieures} = \text{énergies positives} \\ \quad " \quad \text{inférieures} = \quad " \quad \text{négatives} \end{cases}$

d) $u(\vec{p}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi(\vec{x}') e^{-i\vec{p}'.\vec{x}'} d^3\vec{x}'$

Donc $\psi'(\vec{x}) = \psi'_+(\vec{x}) + \psi'_-(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\beta}{2}\right) \int \left(\frac{2E_{p'}}{E_{p'}+m}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{\beta m + \vec{\alpha}'.\vec{p}'}{E_{p'}}\right] \frac{e^{i\vec{p}'.(\vec{x}-\vec{x}')}}{(2\pi)^3} \psi(\vec{x}') d^3x' d^3p'$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1-\beta}{2}\right) \int \left(\frac{2E_{p'}}{E_{p'}+m}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{\beta m + \vec{\alpha}'.\vec{p}'}{E_{p'}}\right] \frac{e^{i\vec{p}'.(\vec{x}-\vec{x}')}}{(2\pi)^3} \psi(\vec{x}') d^3x' d^3p'$$

$$= \int K(\vec{x}, \vec{x}') \psi(\vec{x}') d\vec{x}'$$

donc $\left\| K(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left(\frac{2E_{p'}}{E_{p'}+m}\right)^{1/2} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\beta(\beta m + \vec{\alpha}.\vec{p}')}{E_{p'}}\right] e^{i\vec{p}'.(\vec{x}-\vec{x}')} d^3\vec{p}' \right.$

e) Si $\|\vec{x} - \vec{x}'\| \gg \frac{\hbar}{mc}$, l'intégrale est dominée par $\|p'\| \ll m$ (méthode de la phase oscillante : $\vec{p}'.(\vec{x}-\vec{x}') \lesssim 1$). On a alors $E_{p'} = \sqrt{p'^2+m^2} \sim m$

et $\begin{cases} \frac{2E_{p'}}{E_{p'}+m} \sim 1 \\ 1 + \frac{\beta(\beta m + \vec{\alpha}.\vec{p}')}{E_{p'}} \sim 1 + \frac{\beta^2 m}{m} \sim 2 \end{cases}$

donc $K(\vec{x}, \vec{x}') \sim \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{p}'.(\vec{x}-\vec{x}')} d^3\vec{p}' = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ <u>particule localisée</u>

Ainsi une particule localisée dans la représentation usuelle est étalée sur des distances de l'ordre de λ_c dans la représentation de Foldy-Wouthuysen.

4°) <u>Opérateur de position moyenne</u>

$\vec{x}' = e^{iS} \vec{x} e^{-iS} = \frac{\beta(\beta m + \beta E_p + \vec{\alpha}.\vec{p})}{(2E_p(E_p+m))^{1/2}} \vec{x} \frac{\beta(\beta m + \beta E_p - \vec{\alpha}.\vec{p})}{(2E_p(E_p+m))^{1/2}}$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{m+E_p}{2E_p}\right)^{1/2}, \vec{x}\right]\left(\frac{m+E_p}{2E_p}\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{m+E_p}{2E_p}\right)^{1/2}\left[\vec{x}, \left(\frac{m+E_p}{2E_p}\right)^{1/2}\right]}_{0}$$

2) $$+\frac{1}{2}\frac{m+E_p}{2E_p}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{x}\frac{m+E_p}{2E_p}$$

3) $$+\frac{1}{2}\beta\underbrace{\left[\frac{\vec{\alpha}\,\vec{p}}{2E_p(E_p+m)^{1/2}}, \vec{x}\right]\left(\frac{m+E_p}{2E_p}\right)^{1/2}}_{3a} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\beta\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{(2E_p(E_p+m))^{1/2}}\left[\vec{x}, \left(\frac{m+E_p}{2E_p}\right)^{1/2}\right]}_{3b}$$

4) $$-\frac{1}{2}\underbrace{\left[\left(\frac{m+E_p}{2E_p}\right)^{1/2}, \vec{x}\right]\frac{\beta\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{[2E_p(E_p+m)]^{1/2}}}_{4a} - \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{m+E_p}{2E_p}\right)^{1/2}\beta\left[\vec{x}, \frac{\vec{\alpha}\,\vec{p}}{(2E_p(E_p+m))^{1/2}}\right]}_{4b}$$

5) $$+\frac{1}{2}\left[\frac{\vec{\alpha}\,\vec{p}}{[2E_p(E_p+m)]^{1/2}}, \vec{x}\right]\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{(2E_p(E_p+m))^{1/2}} + \frac{1}{2}\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{(2E_p(E_p+m))^{1/2}}\left[\vec{x}, \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{(2E_p(E_p+m))^{1/2}}\right]$$

6) $$\underbrace{+\frac{1}{2}\vec{x}\,\beta\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{2E_p} + \frac{1}{2}\frac{\beta}{2E_p}\vec{\alpha}\vec{p}\,\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{x}\,\beta\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} - \frac{1}{2}\beta\frac{\vec{\alpha}\vec{p}}{2E_p}\vec{x}}_{=0} + \frac{\vec{x}(\vec{\alpha}\vec{p})(\vec{\alpha}\vec{p})}{2E_p(E_p+m)} + \frac{(\vec{\alpha}\vec{p})(\vec{\alpha}\vec{p})}{2E_p(E_p+m)}\vec{x}$$

or $$\left[\vec{x}, \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{[2E_p(E_p+m)]^{1/2}}\right] = \frac{i\,\vec{\alpha}}{[2E_p(E_p+m)]^{1/2}} - \frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\,\frac{p}{E_p^2(E_p+m)}\frac{\vec{p}}{p}\frac{2E_p+m}{[2E_p(E_p+m)]^{1/2}}$$

$$= A\vec{\alpha} + B\frac{\vec{p}}{p}(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})$$

car avec $$f(p) = \frac{1}{[2E_p(E_p+m)]^{1/2}}$$

$$\frac{f'(p)}{f(p)} = -\frac{1}{2}(\ln E_p)' - \frac{1}{2}(\ln(E_p+m))' \qquad E_p = \sqrt{p^2+m^2}$$

$$= -\frac{1}{4}(\ln(p^2+m^2))' - \frac{1}{2}\left(\ln(\sqrt{p^2+m^2}+m)\right)'$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+m^2} - \frac{1}{2}\frac{\frac{p}{\sqrt{p^2+m^2}}}{\sqrt{p^2+m^2}+m} = -\frac{p}{2E_p^2} - \frac{1}{2}\frac{p}{(E_p+m)E_p}$$

$$= -\frac{p}{2}\frac{2E_p+m}{E_p^2(E_p+m)}$$

dans la ligne 5 seul reste le terme A

6: les deux derniers termes s'écrivent encore $\vec{x}\overbrace{\frac{p^2}{\dots}}^{\frac{E_p-m}{2E_p}} + \frac{p^2}{\dots}\vec{x}$

donc ② + ⑥ donnent $\vec{x}$

3a et 3b sont identiques car $\left[\vec{x}, \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{(2E_p(E_p+m))^{1/2}}\right]$ commute avec β.

De même 3b = 4a

$$\left[\vec{x}, \left(\frac{m+E_p}{2E_p}\right)^{1/2}\right] = i\vec{\nabla}_p\left(\frac{m+E_p}{2E_p}\right)^{1/2} = i\frac{d}{dp}\left(\frac{m+E_p}{2E_p}\right)^{1/2}\frac{\vec{p}}{p}$$

$$g(p) = \left(\frac{m+E_p}{2E_p}\right)^{1/2}$$

$$\ln g(p) = \frac{1}{2}\ln(m+E_p) - \frac{1}{2}\ln 2E_p$$

$$\frac{g'(p)}{g(p)} = \frac{1}{2}\frac{p}{(E_p+m)E_p} - \frac{1}{2}\frac{p}{E_p^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-m\,p}{E_p^2(E_p+m)} \qquad p = \sqrt{(E_p+m)(E_p-m)}$$

$$g'(p) = -\frac{m}{2E_p^2}\left(\frac{E_p-m}{2E_p}\right)^{1/2}$$

$$\text{donc } \vec{x}' = \vec{x} \overbrace{-\left(\frac{m+E_p}{2E_p}\right)^{1/2}\beta\left[A\vec{\alpha} + B\frac{\vec{p}}{p}(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\right]}^{3a+4b} + \underbrace{\frac{\beta\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{(2E_p(E_p+m))^{1/2}}\left[\vec{x}, \left(\frac{m+E_p}{2E_p}\right)^{1/2}\right]}_{3b+4a}$$

$$B = -\frac{i}{2}\frac{p(2E_p+m)}{E_p^2(E_p+m)(2E_p(E_p+m))^{1/2}}$$

$$\underbrace{-\frac{i}{2}\frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})}{2E_p(E_p+m)} + \frac{i}{2}\frac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\vec{\alpha}}{2E_p(E_p+m)}}_{⑤ = -\frac{\vec{\sigma}\wedge\vec{p}}{2E_p(E_p+m)}}$$

car $\vec{\sigma}\wedge\vec{p} = \dfrac{1}{2i}(\vec{\alpha}\wedge\vec{\alpha})\wedge\vec{p}$

$$= \frac{1}{2i}\left((\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\vec{\alpha} - \vec{\alpha}(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\right)$$

$$= \vec{x} - \frac{i\beta\vec{\alpha}}{2E_p} + i\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\,\frac{\vec{p}}{p}\frac{1}{2E_p}\left[\frac{(2E_p+m)(E_p+m)^{1/2}(E_p-m)^{1/2} - m(E_p+m)^{1/2}(E_p-m)^{1/2}}{2(E_p+m)E_p^2}\right]$$

$$-\frac{\vec{\sigma}\wedge\vec{p}}{2E_p(E_p+m)}$$

$$\boxed{\vec{x}' = \vec{x} - \frac{i\beta\vec{\alpha}}{2E_p} + \frac{i\beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\vec{p} - (\vec{\sigma}\wedge\vec{p})E_p}{2E_p^2(E_p+m)}}$$

b) On cherche $\vec{X}$ t.q $\vec{X}' = \vec{x}$

$$\vec{x} = e^{iS}\,\vec{X}\,e^{-iS}$$

soit $\vec{X} = e^{-iS}\,\vec{x}\,e^{iS}$

On répète le même calcul, en changeant le signe devant $\beta\vec{\alpha}\,\vec{p}$.

→ il suffit de faire $\beta \to -\beta$, ce qui donne

$$\Bigg\| \; \vec{X} = \vec{x} + \frac{i\beta\vec{\alpha}}{2E_p} - \frac{i\beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\,\vec{p} + [\vec{\sigma}\wedge\vec{p}]\,p}{2E_p\,(E_p+m)\,p}$$

d) $\dfrac{d\vec{X}}{dt} = i\,[H, \vec{X}]$

$$\text{or}\; \begin{cases} H' = e^{iS}\,H\,e^{-iS} \\ \vec{x} = e^{iS}\,\vec{X}\,e^{-iS} \end{cases}$$

donc $e^{iS}[H,\vec{X}]e^{-iS} = [H', \vec{x}] = \beta\,[E_p, \vec{x}] = -i\beta\,E_p'\,\vec{u}_p = -i\beta\,\dfrac{\vec{p}}{E_p}$

$$\text{donc}\; \Bigg\| \; \frac{d\vec{X}'}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \beta\,\frac{\vec{p}}{E_p}$$

$$\text{et}\; i[H,\vec{X}] = e^{-iS}\,i[H', \vec{x}]\,e^{iS} = \frac{(m+E_p-\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\,\beta\,(m+E_p+\beta\vec{\alpha}\,\vec{p})}{2E_p\,(E_p+m)}\;\frac{\vec{p}}{E_p}$$

$$= \beta\left[\frac{m+E_p}{2E_p^2} - \frac{(E_p+m)(E_p-m)}{2E_p^2(E_p+m)}\right]\vec{p} + \vec{\alpha}\cdot\vec{p}\;\frac{\vec{p}}{E_p}$$

$$\text{donc}\; \Bigg\| \; \frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{\vec{p}}{E_p}\cdot\frac{\beta m + \vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{E_p}$$

or $\Lambda_{\vec{p}} = \dfrac{\beta m + \vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{E_p}$ a pour valeurs propres $(+1)$ états d'énergie positive

et -1 " " négative

→ $\dfrac{d\vec{X}}{dt}$ est l'opérateur de vitesse habituel : $\dfrac{\vec{p}}{E_p}$ (états d'énergie >0)

$-\dfrac{\vec{p}}{E_p}$ (" " <0)

$\dfrac{d\vec{X}'}{dt}$

c) $[\vec{x}_i, \vec{x}_j] = 0$ donc $[\vec{X}_i, \vec{X}_j] = 0$

(par transformation par e^{iS})

de même $[X_i, P_j] = e^{-iS}[x_i, p_j]e^{iS} = i\hbar\delta_{ij}$

($P_i = p_i$ car $\vec{p}$ commute avec S)

D'après la forme de $\vec{X}$ il est immédiat que $\vec{X}$ se transforme comme un vecteur.

5°) <u>Opérateur de spin moyen</u>

$$\vec{\Sigma} = \vec{\Sigma}' = \vec{\sigma} = \frac{1}{2i}(\vec{\alpha}\wedge\vec{\alpha})$$

$$= e^{iS}\vec{\Sigma}_n e^{-iS}$$

ancienne représentation: $\vec{X}\wedge\vec{p} \rightarrow \vec{X}'\wedge\vec{p} = e^{iS}[\vec{X}\wedge\vec{p}]e^{-iS}$

$$= e^{iS}\vec{X}e^{-iS}\wedge\vec{p}$$

$$= \vec{x}\wedge\vec{p}$$

$\vec{\Sigma}_n$ et $\vec{X}\wedge\vec{p}$ sont séparément des constantes du mouvement:

en effet dans la représentation de F.W, $H' = \beta E_p$ est un scalaire,

donc il commute avec $\vec{x}\wedge\vec{p}$;

d'autre part $\vec{\Sigma}$ commute avec β, donc avec H'.

→ d'où le résultat dans l'ancienne représentation.

<u>Calcul de $\vec{\Sigma}_n$:</u>

$$\vec{\Sigma}_n = e^{-iS}\vec{\Sigma}e^{iS} = \frac{m+E_p-\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{[2E_p(E_p+m)]^{1/2}}\vec{\Sigma}\frac{m+E_p+\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{[2E_p(E_p+m)]^{1/2}}$$

$$= \frac{m+E_p}{2E_p}\vec{\Sigma} + \frac{1}{2E_p}\left[\vec{\Sigma}(\vec{\gamma}\,\vec{p}) - (\vec{\gamma}\cdot\vec{p})\vec{\Sigma}\right] - \frac{1}{2E_p(E_p+m)}(\vec{\gamma}\cdot\vec{p})\vec{\Sigma}(\vec{\gamma}\,\vec{p})$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\gamma} = i\sigma_2\otimes\vec{\sigma}\\ \vec{\Sigma} = I\otimes\vec{\sigma}\end{array}\right\}$$ donc $\vec{\Sigma}(\vec{\gamma}\cdot\vec{p}) - (\vec{\gamma}\cdot\vec{p})\vec{\Sigma} = i\,\sigma_2\otimes\underbrace{\left(\vec{\sigma}(\vec{\sigma}\,\vec{p}) - (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\vec{\sigma}\right)}_{\vec{p}\wedge(\vec{\sigma}\wedge\vec{\sigma})} = -2\,\sigma_1\otimes\vec{p}\wedge i$

$$= -2i\,\vec{\gamma}\wedge\vec{p}$$

$$-(\vec{\gamma}.\vec{p})\vec{\Sigma}(\vec{\gamma}.\vec{p}) = \sigma_2 \otimes \vec{\sigma}.\vec{p} \quad I \otimes \vec{\sigma} \quad \sigma_2 \otimes (\vec{\sigma}.\vec{p})$$

$$= \underbrace{\sigma_2^2}_{1} \otimes (\vec{\sigma}.\vec{p})\,\vec{\sigma}\,(\vec{\sigma}.\vec{p})$$

$$\vec{\sigma}(\vec{\sigma}.\vec{p}) = p^j \sigma^k \sigma^j = p^j(\delta^{kj} + i\,\varepsilon^{kjk'}\sigma^{k'})$$

$$= \vec{p} + i(\vec{p}\wedge\vec{\sigma})$$

et $(\vec{\sigma}.\vec{p})\vec{\sigma} = \vec{p} - i\,\vec{p}\wedge\vec{\sigma}$

donc $(\vec{\sigma}.\vec{p})\vec{\sigma}(\vec{\sigma}.\vec{p}) = (\vec{\sigma}.\vec{p})\vec{p} + \frac{i}{2}\underbrace{[(\vec{\sigma}.\vec{p})(\vec{p}\wedge\vec{\sigma}) - (\vec{p}\wedge\vec{\sigma})(\vec{\sigma}.\vec{p})]}_{p_{k'}\sigma_{k'}\,\varepsilon_{ijk}\,p_i\sigma_j \;-\; p_{k'}\,\varepsilon_{ijk}\,p_i\,\sigma_j\sigma_{k'}}$

$$\sigma_k\sigma_j - \sigma_j\sigma_k = 2i\,\varepsilon_{kji'}\,\sigma_{i'}$$

$$\text{donc} = 2i\,p_k\,p_i\,\varepsilon_{ijk'}\,\varepsilon_{kji'}\,\sigma_{i'}$$

$$= \underbrace{2i\,p^2\,\vec{\sigma}}_{\substack{k=i\\ k'=i'}} \quad \underbrace{-2i(\vec{p}.\vec{\sigma})\,\vec{p}}_{\substack{k=k'\\ i=i'}}$$

donc $(\vec{\sigma}.\vec{p})\vec{\sigma}(\vec{\sigma}.\vec{p}) = (\vec{\sigma}.\vec{p})\vec{p} - p^2\vec{\sigma} + (\vec{\sigma}.\vec{p})\vec{p} = \underbrace{2(\vec{\sigma}.\vec{p})\,\vec{p}}_{2p^2\vec{\sigma} - 2\vec{p}\wedge(\vec{\sigma}\wedge\vec{p})} - p^2\vec{\sigma}$

d'où $\vec{\Sigma}_n = \dfrac{m+E_p}{2E_p}\vec{\Sigma} - i\dfrac{\vec{\gamma}\wedge\vec{p}}{E_p} + \underbrace{I\otimes\left(p^2\vec{\sigma} - 2\vec{p}\wedge(\vec{\sigma}\wedge\vec{p})\right)}_{p^2\, \underbrace{I\otimes\vec{\sigma}}_{\vec{\Sigma}} \;-\; 2\vec{p}\wedge(\vec{\Sigma}\wedge\vec{p})}\dfrac{1}{2E_p(E_p+m)}$

$$\frac{p^2}{(E_p-m)(E_p+m)}$$

$$\left\| \; \vec{\Sigma}_M = \vec{\Sigma} - i\,\frac{\vec{\gamma}\wedge\vec{p}}{E_p} - \frac{\vec{p}\wedge(\vec{\Sigma}\wedge\vec{p})}{E_p(E_p+m)} \right.$$

2-2 Représentation ultra-relativiste

$$e^{iS}\,H\,e^{-iS} = \beta\left[m\cos\left(\frac{pw}{m}\right) + p\sin\left(\frac{pw}{m}\right)\right] + \frac{\vec{\alpha}.\vec{p}}{p}\left[p\cos\left(\frac{pw}{m}\right) - m\sin\left(\frac{pw}{m}\right)\right]$$

en choisissant $w' = -\frac{m}{p}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{m}{p}$ on fait disparaître les termes pairs.

donc $H'' = \dfrac{\vec{\alpha}.\vec{p}}{p}\,E_p$ $\rightarrow$ séparation en 2 équations décrivant les états d'hélicité >0 et <0.

3- Particule de Dirac dans un champ électromagnétique extérieur

$$eA \sim p$$
$$\mathcal{E} = eV \sim \frac{p^2}{m}$$
$$\vec{\nabla} \sim p$$
$$\partial t \sim \frac{p^2}{m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathcal{O}}{m} \sim \dfrac{p}{m} \\ \dfrac{\mathcal{E}}{m} \sim \left(\dfrac{p}{m}\right)^2 \end{cases}$$

1°) $S = -i\beta \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{2m}$ au premier ordre en $\frac{p}{m}$ (car $w\left(\frac{p}{m}\right) \sim 1$)

$$= -\frac{i\beta}{2m}\mathcal{O}$$

Il est donc naturel de prendre $S = -\dfrac{i\beta}{2m}\mathcal{O}$ dans le cas non libre.

2°) $e^{sA} B e^{-sA} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} \, B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k A^k}{k!}$ (développement au voisinage de $s=0$).

en 0: B

$$\frac{d}{ds}\left(e^{sA} B e^{-sA}\right) = A e^{sA} B e^{-sA} - e^{sA} B A e^{-sA}$$

en 0: $AB - BA = [A,B]$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(e^{sA} B e^{-sA}\right) = A A e^{sA} B e^{-sA} - A e^{sA} B e^{-sA} A - A e^{sA} B A e^{-sA} + e^{sA} B A e^{-sA} A$$

$$= \left[A, \frac{d}{ds}\left(e^{sA} B e^{-sA}\right)\right]$$

en 0: $[A,[A,B]]$

etc...

donc $e^{sA} B e^{-sA} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \frac{d^n}{ds^n}\left(e^{sA} B e^{-sA}\right)\Big|_{s=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} [A,[A,[\ [A,B]]\dots]]$

en $s=1$: $\displaystyle e^{A} B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [A,[A,[\dots[A,B]]\dots]]$

3°) $H' - i\partial t = e^{iS}\left[H - i\partial t\right] e^{-iS}$

$$= e^{iS} H e^{-iS} - i e^{iS} \partial t \, e^{-iS}$$

$$= H + [iS,H] + \frac{1}{2}[iS,[iS,H]] + \frac{1}{6}[iS,[iS,[iS,H]]] + \frac{1}{24}[iS,[iS,[iS,[iS,H]]]]$$

$$- i\partial t + \underbrace{[S,\partial t]}_{-\dot{S}} + \underbrace{\frac{i}{2}[S,\underbrace{[S,\partial t]}_{\dot{S}}]}_{-\frac{i}{2}[S,\dot{S}]} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{p}{m}\right)^4\right)$$

$$[iS,H] = \frac{1}{2m}\left[\beta\mathcal{O}, \beta m + \mathcal{O} + \mathcal{E}\right]$$

$$\mathcal{O} = \vec{\alpha}\cdot(\vec{p}-e\vec{A})$$

$$\beta\mathcal{O}\beta - \beta^2\mathcal{O} = -\beta^2\mathcal{O} - \beta^2\mathcal{O} = -2\mathcal{O}$$

$$\beta\mathcal{O}\mathcal{O} - \mathcal{O}\beta\mathcal{O} = \beta\mathcal{O}\mathcal{O} + \beta\mathcal{O}\mathcal{O} = 2\beta\mathcal{O}^2$$

donc $[iS, H] = -\mathcal{O} + \frac{\beta}{m}\mathcal{O}^2 + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O}, \mathcal{E}]$

$$\frac{1}{2}[iS,[iS,H]] = \frac{1}{4m}\left[\beta\mathcal{O}, -\mathcal{O} + \frac{\beta\mathcal{O}^2}{m} + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\mathcal{E}]\right]$$

$$= -\frac{1}{2m}\beta\mathcal{O}^2 + \frac{1}{4m^2}\left(\beta\mathcal{O}\beta\mathcal{O}^2 - \beta\mathcal{O}^2\beta\mathcal{O}\right) + \frac{1}{8m^2}\left(\beta\mathcal{O}\beta[\mathcal{O},\mathcal{E}] - \beta[\mathcal{O},\mathcal{E}]\beta\mathcal{O}\right)$$

$$= -\frac{1}{2m}\beta\mathcal{O}^2 - \frac{\mathcal{O}^3}{2m^2} - \underbrace{\frac{1}{8m^2}[\mathcal{O},[\mathcal{O},\mathcal{E}]]}_{\text{d'ordre 4}}$$

→ d'ordre ≥ 4 dans le calcul des termes suivants

$$\frac{1}{6}[iS,[iS,[iS,H]]] \sim \frac{1}{6m}\left[\beta\mathcal{O}, -\frac{\beta\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\mathcal{O}^3}{2m^2}\right]$$

$$\sim \frac{1}{12m^2}\left[\underbrace{-\beta\mathcal{O}\beta\mathcal{O}^2 + \beta\mathcal{O}^2\beta\mathcal{O}}_{\text{identiques}} \underbrace{- \frac{\beta\mathcal{O}^4}{m} + \mathcal{O}^3\frac{\beta\mathcal{O}}{m}}_{\text{identiques}}\right]$$

$$\sim \frac{1}{12m^2}\left[2\mathcal{O}^3 - \frac{2}{m}\beta\mathcal{O}^4\right] = \underset{\text{ordre 3}}{\frac{\mathcal{O}^3}{6m^2}} - \underset{\text{ordre 4}}{\frac{\beta\mathcal{O}^4}{6m^3}}$$

$$\frac{1}{24}[iS,[iS,[iS,[iS,H]]]] \sim \frac{1}{8m}\left[\beta\mathcal{O}, \frac{\mathcal{O}^3}{6m^2}\right] = \frac{1}{24m^3}\beta\mathcal{O}^4$$

$$-\dot{S} = \frac{i\beta}{2m}\dot{\mathcal{O}}$$

$$-\frac{i}{2}[S,\dot{S}] = \frac{i}{8m^3}[\beta\mathcal{O},\beta\dot{\mathcal{O}}] = \frac{-i}{8m^3}[\mathcal{O},\dot{\mathcal{O}}]$$

$$H' = \beta m + \overbrace{\mathcal{E} + \frac{\beta\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\beta\mathcal{O}^4}{8m^3} - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O},[\mathcal{O},\mathcal{E}]] - \frac{i}{8m^3}[\mathcal{O},\dot{\mathcal{O}}]}^{\mathcal{E}' \text{ d'ordre 2 et 4}}$$

$$\underbrace{-\frac{\mathcal{O}^3}{3m^2} + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\mathcal{E}] + \frac{i\beta}{2m}\dot{\mathcal{O}}}_{\mathcal{O}' \text{ d'ordre 3}}$$

Pour se débarasser de $\mathcal{O}'$, on peut faire une deuxième transformation $S' = -\frac{i\beta}{2m}\mathcal{O}'$.

$$H'' = H' + i[S', H'] + \text{termes d'ordre} \left(\frac{p}{m}\right)^6 \quad - \dot{S}' \text{ d'ordre} \left(\frac{p}{m}\right)^5$$

$$= H' + i[S', H'] + \text{termes d'ordre} \left(\frac{p}{m}\right)^5$$

or $\{\beta, S'\} = 0$

donc $H'' = H' + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O}', \beta m] = H' - \mathcal{O}'$

$\| H'' = \beta m + \mathcal{E}'$: il ne reste que la 1ère ligne de H'

4°) Explicitons les termes jusqu'au 2ème ordre :

$$H'' = \beta m + \mathcal{E} + \frac{\beta \mathcal{O}^2}{2m} + 4^{\text{ème}} \text{ ordre} \qquad \text{avec } \mathcal{O} = \vec{\alpha}\cdot(\vec{p} - e\vec{A})$$

$$\mathcal{O}^2 = \alpha_i \alpha_j (p_i - eA_i)(p_j - eA_j) \qquad \text{or } \alpha_i \alpha_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

$$= (\vec{p} - e\vec{A})^2 + i\varepsilon_{ijk}(p_i - eA_i)(p_j - eA_j)\sigma_k$$

$$= (\vec{p} - e\vec{A})^2 + i\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{p} - e\vec{A}) \wedge (\vec{p} - e\vec{A})$$

or $\varepsilon_{ijk}(p_i - eA_i)(p_j - eA_j) = -e\varepsilon_{ijk}(p_i A_j + A_i p_j)$

$$= -e\varepsilon_{ijk}(A_i p_j - p_j A_i) = -e\varepsilon_{ijk}[A_i, p_j]$$

$$= -ie\varepsilon_{ijk}\partial_j A_i = ie\varepsilon_{kji}\partial_j A_i = ie B_k$$

Donc $\mathcal{O}^2 = (\vec{p} - e\vec{A})^2 - e\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$

d'où $\| H'' = \beta\left[m + \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m}\right] + eA^0 - \frac{e\beta}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$ Hamiltonien de Pauli

5°) Examinons les 3 termes du 4ème ordre, qui représentent les corrections relativistes (il n'y a pas de terme du 3ème ordre) :

- terme en $-\frac{\beta \mathcal{O}^4}{8m^3}$: c'est la correction à l'énergie cinétique $-\beta\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^4}{8m^3}$ qui vient du développement de $((\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2)^{1/2}$

• terme en $-\frac{1}{8m^2}[\mathcal{O},[\mathcal{O},\mathcal{E}]] = \frac{i}{8m^2}[\mathcal{O},\dot{\mathcal{O}}]$:

$$[\mathcal{O},\mathcal{E}] = [\vec{\alpha}\cdot(\vec{p}-e\vec{A}), eA^0] = \vec{\alpha}\cdot[\vec{p}, eA^0]$$
$$= -ie\vec{\alpha}\,\vec{\nabla}A^0$$

$$[\mathcal{O},\mathcal{E}] + i\dot{\mathcal{O}} = -ie\vec{\alpha}\left[\vec{\nabla}A^0 - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right] = ie\vec{\alpha}\cdot\vec{E}$$

d'où la contribution des 2ème et 3ème terme: $-\frac{ie}{8m^2}[\mathcal{O},\vec{\alpha}\cdot\vec{E}]$

$$= -\frac{ie}{8m^2}[\vec{\alpha}\cdot(\vec{p}-e\vec{A}), \vec{\alpha}\cdot\vec{E}]$$

remarque générale:

$$[\alpha_i B_i, \alpha_j C_j] = \alpha_i[B_i, \alpha_j C_j] + [\alpha_i, \alpha_j C_j]B_i$$
$$= \alpha_i\alpha_j[B_i, C_j] + [\alpha_i, \alpha_j]C_j B_i$$

or $\alpha_i\alpha_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

$$= [B_i, C_i] + i\varepsilon_{ijk}[B_i, C_j] + 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k C_j B_i$$
$$= [B_i, C_i] + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k[B_i, C_j] - 2i\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{B})$$

ici $[B_i, C_i] = [p_i, E_i] = -i\vec{\nabla}\vec{E}$

$[B_i, C_j] = [p_i, E_j] = -i\partial_i E_j$

$$\Rightarrow -\frac{ie}{8m^2}[\mathcal{O},\vec{\alpha}\cdot\vec{E}] = -\frac{e}{8m^2}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \frac{ie}{8m^2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) - \frac{e}{4m^2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{E}\wedge(\vec{p}-e\vec{A}))$$

6°) Cas d'un potentiel électrostatique à symétrie sphérique

$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \vec{0}$ $\qquad \vec{E} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\vec{r}$ $\qquad$ donc $\vec{\sigma}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{p}) = -\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\vec{\sigma}\cdot\vec{L}$

avec $\vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$, spin intrinsèque de l'électron, on a donc:

$$\Delta H = -\underset{①}{\frac{p^4}{8m^3}} + \underset{②}{\frac{e}{2m^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\vec{L}\cdot\vec{S}} - \underset{③}{\frac{e}{8m^2}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}$$

(1) : terme de "variation de masse avec la vitesse" : correction cinématique

(2) : interaction spin-orbite

Rem : avec $\vec{\mu} = +\frac{e}{2m} g \vec{S} = -\frac{e}{m}\frac{\vec{\sigma}}{2}$ pour $g=2$

on devrait avoir un terme en $-\vec{\mu}.\vec{B}' = -\frac{e}{2m^2}\vec{\sigma}(\vec{E}\wedge\vec{p}) = \frac{e}{m^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\vec{L}.\vec{S}$

où $\vec{B}' = -\vec{v}\wedge\vec{E}$ est le champ magnétique agissant sur l'électron

(formules de changement de référentiel : $\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2}\wedge\vec{E} \end{cases}$)

En réalité ce terme est réduit par un facteur 2 à cause de la précession de Thomas : comme le mouvement de l'électron autour du proton n'est pas rectiligne et uniforme, le spin de l'électron tourne par rapport au référentiel du laboratoire.

(3) : terme de Darwin, qui est relié au Zitterbewegung.

En effet le couplage de l'électron avec le champ n'est plus local dans cette approche non relativiste. Donc l'électron voit le champ sur une distance de l'ordre de $\frac{1}{m}$, puisque sa position fluctue d'une quantité $\frac{1}{m}$.

$$\langle eV(\vec{r}+\delta\vec{r})\rangle = eV(\vec{r}) + \frac{e}{2}\frac{\partial^2 V(\vec{r})}{\partial r^i \partial r^j}\langle \delta r^i \delta r^j\rangle + \ldots$$

Pour un potentiel à symétrie sphérique, $\langle \delta r^i \delta r^j\rangle = \frac{\delta^{ij}}{3}\langle \delta r^2\rangle \simeq \frac{\delta^{ij}}{3m^2}$

D'où $\langle eV(\vec{r}+\delta\vec{r})\rangle - eV(\vec{r}) = \frac{e}{6m^2}\Delta V = -\frac{e}{6m^2}\,\mathrm{div}\,\vec{E}$

ce qui donne le terme de Darwin aux facteurs numériques près.