Caractères de $SU(2)$

1°) $\chi_j(U) = \text{Trace}\, \mathcal{D}^j(U) = \text{Trace}\, e^{-i\theta \vec{n}.\vec{J}}$

$\chi_j(U(\theta,\vec{k})) = \text{Trace}\, e^{-i\theta J_3}$

$$\chi_j(U) = \sum_{m=-j}^{m=+j} e^{-i\theta m} = 1 + e^{i\theta} + \dots + e^{ij\theta} + e^{-i\theta} + \dots + e^{-ij\theta}$$

$$= \frac{1 - e^{i(j+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} + e^{-i\theta}\left[1 + \dots + e^{-i(j-1)\theta}\right]$$

$$= \frac{1 - e^{i(j+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} + e^{-i\theta}\, \frac{1 - e^{-ij\theta}}{1 - e^{-i\theta}}$$

$$= \frac{1 - e^{i(j+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} + \frac{1 - e^{-ij\theta}}{e^{i\theta} - 1}$$

$$= \frac{-e^{i(j+1)\theta} + e^{-ij\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{-e^{i(j+\frac{1}{2})\theta} + e^{-i(j+\frac{1}{2})\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}}$$

$$= \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\theta}{\sin \theta/2}$$

2°) Soit U une rotation autour de $\vec{n}$ d'angle θ

$$U(\theta,\vec{n}) = V\, U(\theta,\vec{k})\, V^{-1}$$

où $V \in SU(2)$ est la rotation qui amène $\vec{k}$ sur $\vec{n}$.

Donc $\mathcal{D}^j(U(\theta,\vec{n})) = \mathcal{D}^j(V)\, \mathcal{D}^j(U(\theta,\vec{k}))\, \mathcal{D}^j(V^{-1})$

$$\text{Trace}\, \mathcal{D}^j(U(\theta,\vec{n})) = \text{Trace}\left[\mathcal{D}^j(V)\, \mathcal{D}^j(U(\theta,\vec{k}))\, \mathcal{D}^j(V^{-1})\right]$$

$$= \text{Trace}\left[\underbrace{\mathcal{D}^j(V^{-1})\, \mathcal{D}^j(V)}_{\mathcal{D}^j(V^{-1}V) = \mathcal{D}^j(1) = 1}\, \mathcal{D}^j(U(\theta,\vec{k}))\right]$$

$= \text{Trace } \mathcal{D}^j(U(\theta, \vec{k}))$

Donc $\| \chi(\theta, \vec{n}) = \chi(\theta, \vec{k})$

3°) <u>Application</u>:

$\text{Trace } e^{-\beta H} = \text{Trace } e^{\beta\mu \vec{J}\cdot\vec{B}}$

de la forme $\text{Trace } e^{-i\theta \vec{J}\cdot\vec{n}}$ avec $\vec{n} \, // \, \vec{B}$
$\theta = i\beta\mu B$

donc $Z(\beta) = \dfrac{\sin (j+\frac{1}{2}) i\beta\mu B}{\sin \frac{i\beta\mu B}{2}}$

$$\| \; Z(\beta) = \frac{sh (j+\frac{1}{2})\beta\mu B}{sh \frac{\beta\mu B}{2}}$$

4°) a) En calculant le caractère de $\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2}$, déterminer la décomposition en composantes irréductibles de $\mathcal{D}^j \otimes \mathcal{D}^{1/2}$:

$$\chi(\mathcal{D}^j \otimes \mathcal{D}^{1/2}) = \chi(\mathcal{D}^j)\, \chi(\mathcal{D}^{1/2})$$

$$= \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\theta \quad \sin\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin(j+\frac{1}{2})\theta \quad \cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\sin(j+1)\theta + \sin j\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = \chi(\mathcal{D}^{j+1/2}) + \chi(\mathcal{D}^{j-1/2})$$

Donc $\mathcal{D}^j \otimes \mathcal{D}^{1/2} = \mathcal{D}^{j+\frac{1}{2}} + \mathcal{D}^{j-\frac{1}{2}}$

b) $$\int \frac{d\mu(G)}{16\pi^2} \mathcal{D}^j_{mn}(U)^* \mathcal{D}^{j'}_{m'n'}(U) = \frac{1}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}$$

$d\mu(G) = 2(1-\cos\theta)\, d\theta\, d^2\vec{n}$

avec $U = \cos\frac{\theta}{2} - i\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \sin\frac{\theta}{2}$

$$\int \frac{d\mu(G)}{16\pi^2} \mathcal{D}^{j\,*}_{mm}(U)\, \mathcal{D}^{j'}_{m'm'}(U) = \frac{1}{2j+1}\, \delta_{jj'}\, \delta_{mm'}$$

(sans sommation)

$$\int \frac{d\mu(G)}{16\pi^2} \sum_m \mathcal{D}^{j\,*}_{mm}(U)\, \mathcal{D}^{j'}_{m'm'}(U) = \frac{\delta_{jj'}}{2j+1}$$

donc

$$\int \frac{d\mu(G)}{16\pi^2} \chi_j^*(U)\, \mathcal{D}^{j'}_{m'm'}(U) = \frac{\delta_{jj'}}{2j+1}$$

après sommation sur m' on obtient.

$$\int \frac{d\mu(G)}{16\pi^2} \chi_j^*(U)\, \chi_{j'}(U) = \delta_{jj'}$$

$\chi_j(U)$ ne dépend pas de $\vec{n}$. L'intégration sur $\vec{n}$ donne:

$$\frac{4\pi}{16\pi^2}\, 2\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\, d\theta\, \chi_j(U(\theta))\, \chi_{j'}(U(\theta)) = \delta_{jj'}$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\, \chi_j(U)\, \chi_{j'}(U)\, d\theta = 2\pi\, \delta_{jj'}$$

5°) La représentation $\mathcal{D}(\tfrac{1}{2}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{D}(\tfrac{1}{2})$ a pour caractère

$$\chi_n = \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^n = \left(\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^n = 2^n\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^n$$

$$N_j = \int \frac{d\mu(G)}{16\pi^2}\, \chi_n\, \chi(\theta)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_n\, \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\, (1-\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2^n \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \sin(j+\tfrac{1}{2})\theta\;\; 2\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{2^n}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \sin(j+\tfrac{1}{2})\theta\, \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$N_j = \frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\varphi)^n \sin(2j+1)\varphi\, \sin\varphi\, d\varphi$$

6°) a) L'état est de la forme $|J, J_z\rangle$ avec $J_z = j$

donc $J \geq j$: c'est un état de spin supérieur ou égal à j

b) le nombre d'états de spin $\geq j$ = nb de choix de

$\frac{n}{2}+j$ spin ↑ parmi n spins $= C_n^{\frac{n}{2}+j} = \phi(j)$

c) le nombre d'états de spin strictement égal à j est donc

$$\phi(j) - \phi(j+1) = \frac{n!}{(\frac{n}{2}+j)!\,(\frac{n}{2}-j)!} - \frac{n!}{(\frac{n}{2}+j+1)!\,(\frac{n}{2}-j-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(\frac{n}{2}+j+1)!\,(\frac{n}{2}-j)!}\left[\left(\frac{n}{2}+j+1\right) - \left(\frac{n}{2}-j\right)\right]$$

$$= \frac{n!\,(2j+1)}{(\frac{n}{2}+j+1)!\,(\frac{n}{2}-j)!} = N_j \qquad j < \frac{n}{2}$$

d) le nombre d'états de spin $\frac{n}{2}$ est égal à 1 : $\phi(\frac{n}{2}) = 1$

nombre total d'état : $N = N_0 + N_1 + \cdots + N_{\frac{n}{2}}$

$$= \phi(0) - \phi(1) + \phi(1) - \phi(2) + \cdots + \phi(\tfrac{n}{2}-1) - \phi(\tfrac{n}{2}) + \cdots$$

$$= \phi(0) - \underbrace{\phi(\tfrac{n}{2}+1)}_{0} = \phi(0)$$

d'où $$N = \frac{n!}{[(\frac{n}{2})!]^2}$$

Nombre total d'état en tenant compte de J_z :

$$\mathcal{N}_n = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} (2j+1) N_j = 1(\phi(0) - \phi(1)) + 3(\phi(1) - \phi(2)) + \cdots + (n-1)(\phi(\tfrac{n}{2}-1) - \phi(\tfrac{n}{2})) + n+1$$

$$= \underbrace{\phi(0)}_{= C_n^{\frac{n}{2}}} + 2\underbrace{(\phi(1) + \phi(2) + \cdots + \phi(\tfrac{n}{2}-1))}_{\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} C_n^{\frac{n}{2}+j} = \frac{(1+1)^n}{2} - 1 - \frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2}} - (n-1)\underbrace{\phi(\tfrac{n}{2})}_{=1} + n+1$$

Donc $\mathcal{N} = 2^n = (2$

$$N_j = \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos\phi)^n \sin(2j+1)\phi \, \sin\phi \, d\phi$$

$$\sin(2j+1)\phi \, \sin\phi = \frac{1}{2}\left[\cos 2j\phi - \cos(2j+2)\phi\right]$$

donc $N_j = \frac{2^n}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\phi)^n \cos 2j\phi - \frac{2^n}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\phi)^n \cos(2j+2)\phi \, d\phi$

$$\int_0^{\pi} \cos^n x \cos mx \, dx = \left[1 + (-1)^{m+n}\right] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos mx \, dx$$

$$= \left[1+(-1)^{m+n}\right] \begin{cases} S \dfrac{n!}{(m-n)(m-n+2)\cdots(m+n)} & n < m \\ \dfrac{\pi}{2^{n+1}} C_n^k & m \leq n \text{ et } n-m = 2k \\ \dfrac{n!}{(2k+1)!!\,(2m+2k+1)!!} & m < n \text{ et } n-m = 2k+1 \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} 0 & m-n = 2k \\ 1 & m-n = 4k+1 \\ -1 & m-n = 4k-1 \end{cases}$$

$I^1_j = \frac{2^n}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\phi)^n \cos 2j\phi \, d\phi$ ($m = 2j$) $I^2_j = \frac{2^n}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\phi)^n \cos(2j+2)\phi \, d\phi$ ($m = 2j+2$)

<u>$n = 2p$ (n pair)</u> : 1) $2j \leq n$ * <u>j entier</u>:

$$I^1_j = \left(1+(-1)^{2j+2p}\right)\frac{2^n}{\pi}\frac{\pi}{2^{n+1}} C_n^{\frac{n}{2}-j} \qquad n-m = 2p-2j = 2\underbrace{(p-j)}_{k}$$

$$I^2_j = \left(1+(-1)^{2j+2+2p}\right)\frac{2^n}{\pi}\frac{\pi}{2^{n+1}} C_n^{\frac{n}{2}-1-j} \qquad \begin{cases} m \leq n: & n-m = n-2j-2 = 2\left(\frac{n}{2}-1-j\right) \\ m = n+2: & m-n = 2 \rightarrow S = 0 \end{cases}$$

Donc $N_j = C_n^{\frac{n}{2}-j} - C_n^{\frac{n}{2}-1-j}$ $\left(j < \frac{n}{2}\right)$

$$= \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}-j\right)!\left(\frac{n}{2}+j\right)!} - \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}-1-j\right)!\left(\frac{n}{2}+1+j\right)!} = \underbrace{\frac{(2j+1)\,n!}{\left(\frac{n}{2}+j+1\right)!\left(\frac{n}{2}-j\right)!}}_{\text{valable } \forall j \,/\, 2j \leq n}$$

* <u>$j = \frac{1}{2}$ entier</u>: $j = \frac{1}{2} + j'$ $j' \in \mathbb{N}$

$m = 1 + 2j' = 2j \leq n$ $m + n = 1 + 2j' + 2p$ donc $1 + (-1)^{m+n} = 0$

$\rightarrow N_j = 0$ (on ne peut former de spin demi-entier en composant un nombre pair de spin $\frac{1}{2}$)

2) $2j > n$ * j entier : $m = 2j$ $m > n$

$m - n = 2k \Rightarrow S = 0$

$\rightarrow N_j = 0$ (on ne peut former des états de spin $j > \frac{n}{2}$ en partant de n spins !)

* $j = \frac{1}{2}$ entier : $j = \frac{1}{2} + j'$ $j' \in \mathbb{N}$ $1 + (-1)^{m+n} = 0$

$\rightarrow N_j = 0$

$n = 2p+1$ (n impair) :

1) $2j \leq n$ * $j = \frac{1}{2}$ - entier : $2j = 2j' + 1$ $j' \in \mathbb{N}$

$m = 2j$ $n - 2j = 2\underbrace{(p - j')}_{k}$ $k = p - j' = \frac{n-1}{2} - (j - \frac{1}{2}) = \frac{n}{2} - j$

donc $I_j^1 = \left(1 + (-1)^{2p+1+2j'+1}\right) \frac{2^n}{n} \frac{n}{2^{n+1}} C_n^{\frac{n}{2} - j} = C_n^{\frac{n}{2} - j}$

$I_j^2 = C_n^{\frac{n}{2} - 1 - j}$ $(2j + 2 \leq n)$ pour $2j + 2 = n$, $S = 0$ $\rightarrow I_j^2 = 0$

donc même résultat : $N_j = \dfrac{(2j+1)\, n!}{(\frac{n}{2} + j + 1)!\,(\frac{n}{2} - j)!}$

* j entier : $1 + (-1)^{n+2j} = 0$ $\rightarrow N_j = 0$

2) $2j > n$ * j entier : $1 + (-1)^{n+2j} = 0$ $\rightarrow N_j = 0$

* $j = \frac{1}{2}$ - entier : $S = 0$ $\rightarrow N_j = 0$