Examen

1. Calculer la limite de la fonction $f(u) = \frac{\sin(u)}{u}$ en $u \to 0$. Le résultat peut-il être obtenu directement ? Quelle méthode peut-elle être utilisée ?
2. Mêmes questions pour la fonction $g(a) = \frac{e^a - \sqrt{1+a}}{a}$ en $a \to 0$.
3. Mêmes questions pour la fonction $h(x) = \frac{\ln(1+x)+\sin(x)}{x}$ en $x \to 0$.
4. Calculer le développement limité de la fonction $f(t) = \frac{\cos(t^2)}{1-t^2}$ au voisinage de $t = 0$ à l'ordre 3.
5. Grâce au développement limité de la fonction $A(x) = x\, e^{-\frac{x}{2}}$ en $x \to 0$, donner l'équation de la droite tangente à $A(x)$ au point $x = 0$. La courbe représentant cette fonction se situe-t-elle au-dessus ou bien en-dessous de sa tangente au voisinage de ce point ? Justifier la réponse.
6. Mettre l'expression $\frac{-1}{2}\,\{\ln([a+b]^2) - \ln(c^2)\}$ sous la forme $\ln(\dots)$.
7. Mettre l'expression $a^{\frac{1}{\ln(a)}}$ sous la forme $e^{(\dots)}$. Utiliser la relation $X = e^{\ln(X)}$ que l'on commentera.
8. Dériver par rapport à la variable r la fonction $p(r) = \ln(e^r - r)$. Quels sont les domaines de définition de $p(r)$ et de sa dérivée $p'(r)$?
9. Quelle est la limite de l'expression $e^{3x} - e^{2x}$ quand $x \to +\infty$? Pourquoi la réponse n'est-elle pas directe ? Quelle méthode employer ? (sans D.L.)
10. Que vaut la limite de la fonction $G(y) = y\,\ln(y)$ quand y tend vers 0^+ ? Argumenter.
11. Soit la courbe paramétrée définie par les deux fonctions : $t \mapsto (x(t), y(t))$ avec $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$. Calculer les composantes du vecteur vitesse dans le plan Oxy au moment $t_0 = \pi/2$. Définir ensuite ce vecteur par 3 caractéristiques. Dessiner alors dans ce plan, une allure possible de la courbe paramétrée étudiée, pour un temps proche de $t_0 = \pi/2$.
12. Soit la courbe paramétrée définie par les deux fonctions $x(t) = t^2 + 1$ et $y(t) = 3t - 4$. Quel est le vecteur vitesse au moment $t_1 = 1$? En déduire l'équation de la droite tangente à la courbe paramétrée en cet instant.
13. Soit la fonction $k(q) = q^2 - 1$ définie sur $\mathbb{R}$. En utilisant le lemme de *Rolle*, démontrer qu'il existe un point $q = h$, dans l'intervalle $h \in]-1, 1[$, de dérivée nulle : $k'(h) = 0$.
14. Soit la fonction $\ell(p) = \sin(p)\, e^p$ définie sur $\mathbb{R}$. En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer qu'il existe un point $p = r$, dans l'intervalle $r \in]0, \frac{\pi}{2}[$, de dérivée : $\ell'(r) = 2\, e^{\frac{\pi}{2}}/\pi$.