Équations du premier degré

I Motivation : applications

1. Un véhicule de masse M (en kg), modélisé par un système ponctuel se déplaçant le long d'une dimension, subit une accélération A (en m/s^{-2}) grâce à la force F_m (en $Newtons$) fournie par son moteur. Considérant les forces associées à son poids P et à la réaction R de la route, représentées vectoriellement sur la Figure 1, déterminer la force de frottement F_f subie par ce véhicule et induite par le vent ?

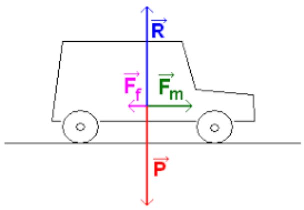

FIGURE 1 – Forces s'appliquant sur une automobile.

2. Pour une TVA (taxe sur la valeur ajoutée) sur les aliments de $5,5\%$, quel est le chiffre d'affaires d'une entreprise l'année où la vente de consommables alimentaires lui a rapporté un montant V (en €) ? Sachant que ses charges [coûts des matières premières, coûts administratifs tels le loyer ou l'électricité, salaires des employés,...] valent C (en €), à combien s'élève alors le bénéfice de celle-ci ? À l'Assemblée Générale, le conseil d'administration vote pour un réinvestissement d'une part du bénéfice d'un montant R (en €). Quelle doit ainsi être la valeur du dividende versé par action (en €/action) ? On notera N_a le nombre d'actionnaires et N_A le nombre d'actions détenues par un actionnaire.

II Rappels de cours

Définitions : Une *équation* est une égalité faisant intervenir des nombres "fixés" et des nombres à chercher (on parle de *variable* ou d'*inconnue*). *Résoudre une équation* consiste à trouver l'ensemble des valeurs des variables inconnues satisfaisant l'égalité. Une équation est dite *du premier degré à une inconnue* lorsqu'elle ne fait intervenir qu'une seule inconnue à chercher et que cette variable est additionnée et/ou multipliée par des nombres fixés.

Exemples.
— $2x + 3 = 0$ est une équation du premier degré à une seule inconnue x.
— $5x + 2 = 3(2x + 8)$ est une équation du premier degré à une seule inconnue x.

— $az + b = 0$ avec a et b des nombres fixés est une équation du premier degré à une inconnue z. En effet, même si on ne connaît pas la valeur de a et de b, ce ne sont pas des nombres “à chercher”.

Contre-exemples.
— $t = (2t+1)(t+2)$ est une équation à une seule inconnue t mais qui n'est pas du premier degré car $(2t+1)(t+2) = 2t^2 + 5t + 2$. Elle fait donc intervenir une puissance deux de la variable : t^2.
— $2x + 3y = 0$ est une équation du premier degré à deux inconnues x et y.

Ensemble de solutions. Les équations à une inconnue du premier degré peuvent posséder :
— Une unique solution. Exemple : $2x + 1 = 0 \iff x = -1/2$. Il s'agit du cas le plus fréquent.
— Tous les nombres réels pour solution. Exemple : $2x + 4 = 2(x + 2)$ est vraie pour tous les nombres x appartenant à $\mathbb{R}$. Ce cas arrive quand les deux expressions de part et d'autre du symbole ‘égal’ correspondent à la même quantité.
— Aucune solution. Exemple : $3x + 1 = 3x + 5$. Ce cas advient lorsqu'il y a le même nombre de x de chaque côté du ‘égal’ mais pas le même nombre additionné.

III Mise en équations

Dans cette partie, il faut trouver soi-même l'équation du premier degré avant de la résoudre.

1. Un magicien dit à un spectateur : “Pensez à un nombre, multipliez-le par 2 puis retranchez 3 au résultat et multipliez le tout par 6. Qu'obtenez-vous ?”. Le spectateur annonce alors 294. Le magicien peut-il retrouver le nombre initial mystérieux ?
2. Trouver deux nombres entiers naturels pairs et consécutifs dont la somme est égale à 206.
3. Après avoir dépensé le tiers de son argent de poche, puis le quart de l'argent de poche alors restant, Marc possède encore 40€. Combien avait-il d'argent de poche ?
4. Trois cousins ont respectivement 32, 20 et 6 ans. Après combien d'années l'âge de l'aîné sera-t-il égal à la somme des deux autres ?
5. Dans un bassin plein aux deux tiers on verse 20 litres d'eau. Celui-ci est alors plein aux trois quarts. Quelle est la capacité volumique du bassin ?
6. Imaginer une équation du premier degré à une inconnue ayant pour solution unique $t = -3$. Même question en introduisant un paramètre libre noté u dans l'équation (avec la même solution pour t).

IV Résolutions

1. Obtenir les solutions des équations suivantes dont l'inconnue est la variable x, en précisant leurs conditions de validité si nécessaire (sachant que a, b sont des nombres complexes différents) :

$$ax + 3x = bx + 5 \quad ; \quad ax + 3x = ax + x - 1 \quad ; \quad a(x+1) = b(x-1) \ .$$

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ les équations suivantes (variable u) :

$$5-4u=0\ ;\quad 5u+8=0\ ;\quad 3u+1=7u+5\ ;\quad 5u-1=2u+4\ ;\quad 0.5(u+2)=1.5u+4\ ;$$

$$7(u+4)-3(u+2)=u+7\ ;\ \ 2(u-1)-3(u+1)=4(u-2)\ ;\ \ 2u+\sqrt{2}=u\sqrt{12}+7\sqrt{3}-(7-\sqrt{2})\ .$$

3. Résoudre les équations suivantes en commençant par éliminer soigneusement les fractions :

$$7x-\frac{1}{4}=\frac{5}{11}\ ;\ \ \frac{3}{2}x+4=2x-5\ ;\ \ \frac{x}{3}+\frac{9}{4}=\frac{-5x}{6}+\frac{15}{2}\ ;\ \ \frac{3-2x}{5}-\frac{x-2}{10}=\frac{5x+2}{2}-\frac{1}{5}\ .$$

4. Résoudre ces équations en prenant soin de déterminer l'ensemble de définition (inconnue $t\neq 1$ et $t\neq -2$) :

$$\frac{2t-3}{3}=\frac{3}{4}\ ;\quad \frac{2t+3}{2}=\frac{7t-2}{3}\ ;\quad \frac{2-t}{1-t}=2\ ;\quad \frac{3}{t+2}=\frac{1}{3t}\ .$$

5. Déterminer les solutions en x de ces équations en supprimant d'abord les parenthèses puis les fractions :

$$\frac{1}{4}(x+4)-\frac{1}{20}(x-60)=\frac{2}{5}(x+15)\ ;\ \ -7x-4=2\left(4-\frac{1}{5}x\right)\ ;\ \ \frac{5(x-2)}{8}+\frac{3(1-x)}{5}=\frac{2x+3}{10}\ .$$

Retrouver ces solutions en commençant par éliminer les fractions.

V Réflexion

1. Existe-t-il une (des) solution(s) à cette équation ? Justifier la réponse.

$$2(y+4)+1-5y=3(1-y)+7\ .$$

2. Pour quelles valeurs de P et de Q l'équation suivante admet-elle une infinité de solutions en x ?

$$67x+Q=Px+37\ .$$

⋆ ⋆ ⋆