Matrices et Vecteurs

Maple dispose de nombreuses fonctions pour manipuler des matrices et obtenir un grand nombre de résultats. Pour les versions antérieures à la version VI,, ces fonctions étaient regroupées dans la bibliothèque **linalg**. Dans la version VI, une nouvelle bibliothèque a été mise en place, elle s'appelle **LinearAlgebra**. Pour charger cette bibliothèque, on tapera l'instruction with(**LinearAlgebra**): La syntaxe est très différente avec l'ancienne bibliothèque linalg Nous travaillerons au début avec la nouvelle, et aussi avec l'ancienne par la suite..

I. Définitions et opérations simples

Il y a au moins deux méthodes pour construire un vecteur (colonne).
V1:=Vector([x,y,z]);
V2:=<x,y,z>;
Pour un vecteur (ligne);
V3:=Vector[row]([x,y,z]);
V4:=<x|y|z>;
Tester ces différentes définitions.

```
> with(LinearAlgebra):
> V1:=Vector([x,y,z]);
```

$$V1 := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

```
> V2:=<x,y,z>;
```

$$V2 := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

```
> V3:=Vector[row]([x,y,z]);
```

$$V3 := [x, y, z]$$

```
> V4:=<x|y|z>;
```

$$V4 := [x, y, z]$$

Il y a plusieurs méthodes pour définir une matrice, à partir de l'instruction Matrix.
1) Méthode ligne à ligne, à partir de listes.
AA:=Matrix([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]);
2) Méthode colonne par colonne à partir de vecteur
BB:=Matrix([<1,2,3>,<4,5,6>,<7,8,9>]);
Il existe surtout des raccourcis très utiles
Pour construire en ligne
AA2:=<<1|2|3>,<4|5|6>,<7|8|9>>;
BB2:=<<1,2,3>|<4,5,6>|<7,8,9>>;
Tester à nouveau ces différentes méthodes.
Pour avoir l'élément de la deuxième ligne et troisième colonne
AA[2,3];

```
> AA:=Matrix([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]);
```

$$AA := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> BB:=Matrix([<1,2,3>,<4,5,6>,<7,8,9>]);
```

$$BB := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> AA2:=<<1|2|3>,<4|5|6>,<7|8|9>>;
```

$$AA2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> BB2:=<<1,2,3>|<4,5,6>|<7,8,9>>;
```

$$BB2 := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> AA[2,3];
```

$$6$$

Initialisation des matrices

Que font les instructions
Matrix(3);
Matrix(3,2);
Matrix(1..3,1..3,5);
Soit la fonctions de deux variables
ff:=(m,n)->cos(m*x)*cos(n*x);
Que donne Matrix(5,ff);
Pour définir une matrice identité
Matrix(3,3,shape=identity);
Pour définir une matrice diagonal
Matrix(3,3,4,shape=diagonal);

```
> Matrix(3);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Matrix(3,2);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Matrix(1..3,1..3,5);
```

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> ff:=(m,n)->cos(m*x)*cos(n*x);
```

$$ff := (m, n) \to \cos(m\,x)\cos(n\,x)$$

```
> FF:=Matrix(5,ff);
```

$$FF :=$$

$$[\cos(x)^2, \cos(x)\cos(2\,x), \cos(x)\cos(3\,x), \cos(x)\cos(4\,x), \cos(x)\cos(5\,x)]$$
$$[\cos(x)\cos(2\,x), \cos(2\,x)^2, \cos(2\,x)\cos(3\,x), \cos(2\,x)\cos(4\,x), \cos(2\,x)\cos(5\,x)]$$
$$[\cos(x)\cos(3\,x), \cos(2\,x)\cos(3\,x), \cos(3\,x)^2, \cos(3\,x)\cos(4\,x), \cos(3\,x)\cos(5\,x)]$$
$$[\cos(x)\cos(4\,x), \cos(2\,x)\cos(4\,x), \cos(3\,x)\cos(4\,x), \cos(4\,x)^2, \cos(4\,x)\cos(5\,x)]$$
$$[\cos(x)\cos(5\,x), \cos(2\,x)\cos(5\,x), \cos(3\,x)\cos(5\,x), \cos(4\,x)\cos(5\,x), \cos(5\,x)^2]$$

```
> Matrix(3,3,shape=identity);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Matrix(3,3,4,shape=diagonal);
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Opérations

Addition de deux matrices (de même dimension)
Exécuter
AA+BB;
Multiplication de deux matrices
AA2.BB2;
BB2.AA2;
Inverse de matrice
Calculer <<1,2>|<3,0>>^(-1);
Augmentation de lignes
AA3:=<V3,AA>;
Augmentation de colonnes
BB3:=<BB|V1>;
A partir de la matrice BB2, construire une matrice 4x4 dont la ligne superieure est consituée de zeros ainsi que la dernière colonne, et dont la sous-matrice 3x3 en bas à gauche est donnée par BB2;

```
> AA+BB;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{bmatrix}$$

```
> AA2.BB2;
```

$$\begin{bmatrix} 14 & 32 & 50 \\ 32 & 77 & 122 \\ 50 & 122 & 194 \end{bmatrix}$$

```
> BB2.AA2;
```

$$\begin{bmatrix} 66 & 78 & 90 \\ 78 & 93 & 108 \\ 90 & 108 & 126 \end{bmatrix}$$

```
> <<1,2>|<3,0>>^(-1);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \end{bmatrix}$$

```
> AA3:=<V3,AA>;
```

$$AA3 := \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> <BB|V1>;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & x \\ 2 & 5 & 8 & y \\ 3 & 6 & 9 & z \end{bmatrix}$$

```
> V4:=Vector(3);
```

$$V4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> BB3:=<BB2|V4>;
```

$$BB3 := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> V5:=Vector[row](4);
```

$$V5 := [0, 0, 0, 0]$$

```
> BB4:=<V5,BB3>;
```

$$BB4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Applications: II. Exponentielle de matrices

Si A est une matrice, alors on définit l'exponentielle de A à partir de la relation $\mathbf{e}^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$.

L'instruction **exponential** permet de calculer directement l'exponentielle de A en utilisant la bibliothèque **linalg**. Calculer aussi la somme pour n=1 à 10 puis n=1 à 20, (on utilisera **evalm** pour calculer explicitement la somme) et vérifier en utilisant l'instruction **evalf** que cette somme converge vers l'exponentielle de A.

Calculer l'exponentielle de la matrice $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

```
> A:=<<1,-3>|<1,-2>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg):
Warning, the previous binding of the name GramSchmidt has been removed
and it now has an assigned value

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> EA:=exponential(A);
```

$$EA := \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{(-1/2)} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \sqrt{3}\, \mathbf{e}^{(-1/2)} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), & \frac{2}{3}\sqrt{3}\, \mathbf{e}^{(-1/2)} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\ -2\sqrt{3}\, \mathbf{e}^{(-1/2)} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), & \mathbf{e}^{(-1/2)} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \sqrt{3}\, \mathbf{e}^{(-1/2)} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \end{bmatrix}$$

```
> evalf(evalm(EA));
```

$$\begin{bmatrix} 1.193207349 & 0.5335071953 \\ -1.600521586 & -0.4073142372 \end{bmatrix}$$

```
> A10:=evalf(evalm(sum(A^n/n!,n=0..10)));
```

$$A10 := \begin{bmatrix} 1.193207396 & 0.5335072200 \\ -1.600521660 & -0.4073142637 \end{bmatrix}$$

```
> A20:=evalf(evalm(sum(A^n/n!,n=0..20)));
```

$$A20 := \begin{bmatrix} 1.193207349 & 0.5335071951 \\ -1.600521585 & -0.4073142368 \end{bmatrix}$$

III. Matrices nilpotentes

Soit une matrice nxn, on appelle une matrice nilpotente une matrice telle que $A^n = 0$ pour . Déterminer toutes les matrices pour n=2.
Montrer en utilisant l'instruction JordanForm que toutes les solutions sont équivalentes à des matrices triangulaires supérieures avec une ligne située au dessus de la diagonale composée de 1. Même exercices pour n=3. Afficher toutes les solutions et vérifier a postériori que la propriété de nilpotence est vérifiée.

```
> A:=<<a,b>|<c,d>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

```
> CC:=A.A;
```

$$CC := \begin{bmatrix} a^2 + c\,b & a\,c + c\,d \\ b\,a + d\,b & c\,b + d^2 \end{bmatrix}$$

```
> sols:=solve({seq(seq(CC[i,j],i=1..2),j=1..2)},{a,b,c,d});
```

$$sols := \{b = 0, d = 0, a = 0, c = c\}, \{a = -d, c = -\frac{d^2}{b}, b = b, d = d\}$$

```
> res1:=subs(sols[1],A);
```

$$res1 := \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> res2:=subs(sols[2],A);
```

$$res2 := \begin{bmatrix} -d & -\frac{d^2}{b} \\ b & d \end{bmatrix}$$

```
> JordanForm(res1);JordanForm(res2);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour plus d'infos sur la forme de Jordan d'une matrice, vous pouvez voir sur internet aux adresses suivantes:
http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/dico/ChgtBTri.html
ou
http://www.saphir-control.fr/articles/lm22/lm22.html (section 4).

```
> A:=<<a,b,c>|<d,e,f>|<g,h,k>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{bmatrix}$$

```
> CC:=A.A.A;
```

$$CC :=$$

$$[(a^2 + d\,b + g\,c)\,a + (a\,d + d\,e + g\,f)\,b + (a\,g + d\,h + g\,k)\,c,$$
$$(a^2 + d\,b + g\,c)\,d + (a\,d + d\,e + g\,f)\,e + (a\,g + d\,h + g\,k)\,f,$$
$$(a^2 + d\,b + g\,c)\,g + (a\,d + d\,e + g\,f)\,h + (a\,g + d\,h + g\,k)\,k]$$
$$[(b\,a + e\,b + h\,c)\,a + (d\,b + e^2 + h\,f)\,b + (b\,g + e\,h + h\,k)\,c,$$
$$(b\,a + e\,b + h\,c)\,d + (d\,b + e^2 + h\,f)\,e + (b\,g + e\,h + h\,k)\,f,$$
$$(b\,a + e\,b + h\,c)\,g + (d\,b + e^2 + h\,f)\,h + (b\,g + e\,h + h\,k)\,k]$$
$$[(a\,c + f\,b + k\,c)\,a + (c\,d + f\,e + k\,f)\,b + (g\,c + h\,f + k^2)\,c,$$
$$(a\,c + f\,b + k\,c)\,d + (c\,d + f\,e + k\,f)\,e + (g\,c + h\,f + k^2)\,f,$$
$$(a\,c + f\,b + k\,c)\,g + (c\,d + f\,e + k\,f)\,h + (g\,c + h\,f + k^2)\,k]$$

```
> sol2:=solve({seq(seq(CC[i,j],i=1..3),j=1..3)},{a,b,c,d,e,f
  ,g,h,k});
```

$$sol2 := \{f = 0, e = 0, k = 0, d = 0, a = 0, b = b, g = 0, h = h, c = c\},$$
$$\{f = f, k = k, h = -\frac{k^2}{f}, e = -k, d = 0, a = 0, b = b, g = 0, c = c\},$$
$$\{f = 0, k = k, g = g, e = 0, c = -\frac{k^2}{g}, d = 0, b = b, a = -k, h = h\}, \{f = f, k = k, g = g,$$
$$c = -\frac{a^2 + h\,f + k\,a + k^2}{g}, d = 0, b = \frac{a^3 + 2\,a\,h\,f + 3\,k\,a^2 + 3\,a\,k^2 + h\,k\,f + k^3}{g\,f}, a = a,$$
$$e = -a - k, h = h\}, \{f = f, k = -a - e, c = -($$
$$d\,a^3 + a^2\,f\,g + 3\,d\,a^2\,e + 3\,d\,a\,e^2 + a\,e\,g\,f + e^2\,g\,f + 2\,d\,a\,f\,h + g\,f^2\,h + d\,e^3 + d\,e\,f\,h) \Big/$$
$$(a\,g\,d + 2\,g\,e\,d + f\,g^2 - d^2\,h), g = g,$$
$$b = \frac{f\,d\,h^2 + d\,e^2\,h - g\,e^3 + d\,a^2\,h + e\,a\,d\,h - g\,e\,f\,h + g\,a\,f\,h}{a\,g\,d + 2\,g\,e\,d + f\,g^2 - d^2\,h}, d = d, e = e, a = a, h = h\},$$
$$\{f = f, g = g, k = \frac{g\,f}{d}, b = -\frac{d^2\,e^2 + 2\,d\,e\,g\,f + g^2\,f^2 + g\,c\,d^2}{d^3}, h = \frac{g\,e}{d}, a = -\frac{d\,e + g\,f}{d},$$
$$d = d, e = e, c = c\}$$

```
> for i from 1 to 6 do HH||i:=subs(sol2[i],A);od;
```

$$HH1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & h \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$HH2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & -k & -\frac{k^2}{f} \\ c & f & k \end{bmatrix}$$

$$HH3 := \begin{bmatrix} -k & 0 & g \\ b & 0 & h \\ -\frac{k^2}{g} & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$HH4 := \begin{bmatrix} a & 0 & g \\ \frac{a^3+2\,a\,h\,f+3\,k\,a^2+3\,a\,k^2+h\,k\,f+k^3}{g\,f} & -a-k & h \\ -\frac{a^2+h\,f+k\,a+k^2}{g} & f & k \end{bmatrix}$$

$HH5 :=$

$[a, d, g]$

$$\left[\frac{f\,d\,h^2+d\,e^2\,h-g\,e^3+d\,a^2\,h+e\,a\,d\,h-g\,e\,f\,h+g\,a\,f\,h}{a\,g\,d+2\,g\,e\,d+f\,g^2-d^2\,h}, e, h\right]$$

$$[-(d\,a^3+a^2\,f\,g+3\,d\,a^2\,e+3\,d\,a\,e^2+a\,e\,g\,f+e^2\,g\,f+2\,d\,a\,f\,h+g\,f^2\,h+d\,e^3+d\,e\,f\,h) \Big/ (a\,g\,d+2\,g\,e\,d+f\,g^2-d^2\,h), f, -a-e]$$

$$HH6 := \begin{bmatrix} -\frac{d\,e+g\,f}{d} & d & g \\ -\frac{d^2\,e^2+2\,d\,e\,g\,f+g^2\,f^2+g\,c\,d^2}{d^3} & e & \frac{g\,e}{d} \\ c & f & \frac{g\,f}{d} \end{bmatrix}$$

```
> for i from 1 to 6 do map(simplify,HH||i.HH||i.HH||i);od;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> for i from 1 to 6 do JordanForm(HH||i);od;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IV. Matrices commutantes.

On considère la matrice suivante

$A := \begin{bmatrix} aa & aa & 0 \\ aa & aa & aa \\ 0 & aa & aa \end{bmatrix}$. On cherche la forme générale des matrices carrés 3x3

$B := \begin{bmatrix} b11 & b12 & b13 \\ b21 & b22 & b23 \\ b31 & b32 & b33 \end{bmatrix}$ qui commutent avec A (c'est à dire que A.B-B.A=0).

On utilisera la bibliothèque LinearAlgebra

1) Construire les matrices A et B. On peut peut utiliser l'instruction BandMatrix pour A et l'instruction Matrix pour B en utilisant la fonction auxilaire suivante $ff := (i, j) \to \mathrm{cat}(b, i, j)$

2) Calculer A.B-B.A

3) Justifier le fait que la solution est indépendante de aa si aa est différent de 0.

On prend aa=1 dans la suite.

4) Résoudre le système à neuf inconnues, avec l'instruction **solve**.

5) Donner la forme générale de la matrice B solution que l'on notera BB. On pourra par exemple utiliser l'instruction subs.

6) Calculer les valeurs propres de BB en utilisant l'instruction Eigenvalues.

```
> with(LinearAlgebra):
> A:=BandMatrix([aa,aa,aa], 1, 3);
```

$$A := \begin{bmatrix} aa & aa & 0 \\ aa & aa & aa \\ 0 & aa & aa \end{bmatrix}$$

L'instruction BandMatrix est utile si on a des matrices ayant des elements non nuls seulement quelques lignes diagonales. Cela evite de rentrer tous les zeros.

```
> ff := proc (i, j) options operator, arrow; cat(b,i,j) end
  proc;
```

$$ff := (i, j) \to \mathrm{cat}(b, i, j)$$

```
> B:=Matrix(3,ff);
```

$$B := \begin{bmatrix} b11 & b12 & b13 \\ b21 & b22 & b23 \\ b31 & b32 & b33 \end{bmatrix}$$

```
> prod:=A.B-B.A;
```

$$prod :=$$
$$[aa\,b21 - aa\,b12 , aa\,b22 - aa\,b11 - aa\,b13 , aa\,b23 - aa\,b12]$$
$$[aa\,b11 + aa\,b31 - aa\,b22 , aa\,b12 + aa\,b32 - aa\,b21 - aa\,b23 ,$$
$$aa\,b13 + aa\,b33 - aa\,b22]$$
$$[aa\,b21 - aa\,b32 , aa\,b22 - aa\,b31 - aa\,b33 , aa\,b23 - aa\,b32]$$

aa est seulement un nombre en facteur, ca ne change donc pas l'ensemble des solutions pour B.

```
> C:=subs(aa=1,A.B-B.A);
```

$$C := \begin{bmatrix} b21 - b12 & b22 - b11 - b13 & b23 - b12 \\ b11 + b31 - b22 & b12 + b32 - b21 - b23 & b13 + b33 - b22 \\ b21 - b32 & b22 - b31 - b33 & b23 - b32 \end{bmatrix}$$

ou de facon equivalente:

```
> C:=simplify((A.B-B.A)/aa);
```

$$C := \begin{bmatrix} b21 - b12 & b22 - b11 - b13 & b23 - b12 \\ b11 + b31 - b22 & b12 + b32 - b21 - b23 & b13 + b33 - b22 \\ b21 - b32 & b22 - b31 - b33 & b23 - b32 \end{bmatrix}$$

```
> res:=solve({seq(seq(C[i,j],i=1..3),j=1..3)});
```

$$res := \{b32 = b23, b21 = b23, b12 = b23, b31 = b13, b22 = b13 + b33, b11 = b33, b13 = b13, b23 = b23, b33 = b33\}$$

```
> BB:=subs(res,B);
```

$$BB := \begin{bmatrix} b33 & b23 & b13 \\ b23 & b13 + b33 & b23 \\ b13 & b23 & b33 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvalues(BB);
```

$$\begin{bmatrix} -b13 + b33 \\ b13 + b33 + \sqrt{2}\ b23 \\ b13 + b33 - \sqrt{2}\ b23 \end{bmatrix}$$