Intégration et sommes discrètres

I. Intégration: méthode directe

I. 1 Primitives

Si les bornes de l'intégration ne sont pas spécifiées, l'instruction **int** permet de déterminer une primitive d'une fonction.
Exemple :
int(1/(x^5+1),x);

```
> int(1/(x^5+1),x);
```

$$\frac{1}{5}\ln(x+1)-\frac{1}{20}\ln(2x^2-x-\sqrt{5}\,x+2)-\frac{1}{20}\ln(2x^2-x-\sqrt{5}\,x+2)\sqrt{5}$$
$$+\frac{\arctan\left(\frac{4x-1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right)}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\frac{1}{5}\frac{\arctan\left(\frac{4x-1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right)\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}-\frac{1}{20}\ln(2x^2-x+\sqrt{5}\,x+2)$$
$$+\frac{1}{20}\ln(2x^2-x+\sqrt{5}\,x+2)\sqrt{5}+\frac{\arctan\left(\frac{4x-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\frac{1}{5}\frac{\arctan\left(\frac{4x-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

Calculer les primitives de $\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx, \int x^3\ln(x)\,dx, \int x^3\ln(x)\,\mathbf{e}^{(-x)}\,dx$

```
> int(1/(x^2+x+1),x);
```

$$\frac{2}{3}\sqrt{3}\,\arctan\left(\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{3}\right)$$

```
> int(x^3*ln(x),x);
```

$$\frac{1}{4}x^4\ln(x)-\frac{1}{16}x^4$$

```
> int(x^3*ln(x)*exp(-x),x);
```

$$(-6-6x-3x^2-x^3)\,\mathbf{e}^{(-x)}\ln(x)-6\,\mathrm{Ei}(1,x)-11\,\mathbf{e}^{(-x)}-5\,\mathbf{e}^{(-x)}x-\mathbf{e}^{(-x)}x^2$$

La primitive d'une fonction ne s'exprime pas toujours à partir de fonction simples.
Exemple :
I2:=int(x^2*exp(x^2-x^3),x);
On peut toutefois obtenir un développement limité de l'intégrale précédente en utilisant l'instruction **series**
series(I2,x,10);
permet de calculer un développement limité de l'intégrale précédente à l'ordre 10.

```
> I2:=int(x^2*exp(x^2-x^3),x);
```

$$I2 := \int x^2\, \mathbf{e}^{(x^2-x^3)}\, dx$$

```
> series(I2,x,10);
```

$$\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{14}x^7-\frac{1}{8}x^8+\frac{2}{27}x^9-\frac{1}{20}x^{10}+O(x^{11})$$

I.2 Intégrales définies

Pour des intégrales simples de la forme $\int_a^b f(x)\,dx$, on dispose avec Maple de l'instruction **int**.

Exemple:
int(4*x^3+2*x^8,x=1..8);
donne le résultat exact de l'intégrale du polynôme $4x^3+2x^8$ entre x=1 et x=8.

```
> int(4*x^3+2*x^8,x=1..8);
```

$$\frac{268472309}{9}$$

Calculer $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $\int_0^1 x\arctan(x)\,dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(x)}\,dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4\sin(x)\cos(x)\,dx$,

```
> int(1/sqrt(1-x^2),x = 0 .. 1);
```

$$\frac{1}{2}\pi$$

```
> int(x*arctan(x),x = 0 .. 1);
```

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi$$

```
> int(sqrt(tan(x)),x = 0 .. Pi/2);
```

$$\frac{1}{2}\pi\sqrt{2}$$

```
> int(x^4*sin(x)*cos(x),x = 0 .. Pi/2);
```

$$\frac{3}{4}-\frac{3}{16}\pi^2+\frac{1}{64}\pi^4$$

I.3 Intégrales impropres

L'instruction **int** permet aussi de calculer des intégrales impropres.
Exemple :

int((4*x^3+2*x^8)*exp(-3*x),x=1..infinity);
int(t^4*ln(t)^2/(1+3*t^2)^3,t=0..infinity) ;
Pour connaître une valeur approchée d'une intégrale, on peut utiliser l'instruction **evalf**.
Calculer les intégrales suivantes exactement et/ou de manière approchée.

```
> int((4*x^3+2*x^8)*exp(-3*x),x=1..infinity);
```

$$\frac{187706}{2187}\,\mathbf{e}^{(-3)}$$

```
> int(t^4*ln(t)^2/(1+3*t^2)^3,t=0..infinity) ;
```

$$\frac{1}{216}\pi\sqrt{3}+\frac{1}{576}\pi^3\sqrt{3}-\frac{1}{108}\pi\sqrt{3}\,\ln(3)+\frac{1}{576}\pi\sqrt{3}\,\ln(3)^2$$

```
>
```

Calculer $\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx, \int_1^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx, \int_1^\infty \frac{x}{1+x^4}\,dx, \int_1^\infty \frac{\mathbf{e}^{(-2x)}}{1+x^2}\,dx$

```
> I32a:=int(ln(x)/(1+x^2),x=0..infinity);
```

$$I32a := 0$$

```
> I32b:=int(ln(x)/(1+x^2),x = 1 .. infinity);evalf(I32b);
```

$$I32b := Catalan$$

$$0.9159655942$$

```
> I32c:=int(x/(1+x^4),x = 1 .. infinity);evalf(I32c);
```

$$I32c := \frac{1}{8}\pi$$

$$0.3926990818$$

```
> I32d:=int(exp(-2*x)/(1+x^2),x = 1 ..
  infinity);evalf(I32c);
```

$$I32d := \frac{1}{2}I\left(\mathbf{e}^{(2I)}\,\mathrm{Ei}(1, 2+2I)-\mathbf{e}^{(-2I)}\,\mathrm{Ei}(1, 2-2I)\right)$$

$$0.3926990818$$

I.4. Intégrales avec paramètre

Pour une fonction avec un paramètre, Maple donne parfois une réponse qui peut paraître incomplète.
Exemple :
int(exp(-a*x^2),x=0..infinity);
L'instruction **assume** permet de faire une hypothèse sur une variable donnée. Dans le cas qui nous intéresse, pour supposer que la partie réelle de a est positive, on introduit l'instruction assume(a>0) ;
Calculer à nouveau l'intégrale précédente. Noter l'apparition d'un tilde. Rappel : Pour que a puisse être à nouveau une variable quelconque, on réinitialise avec l'instruction a:='a' ;.
Vérifier que l'intégrale précédente redevient indéterminée.

```
> Ia:=int(exp(-a*x^2),x=0..infinity);
Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --> a
Will now try indefinite integration and then take limits.
```

$$Ia := \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(\sqrt{a}\,x)}{\sqrt{a}}$$

```
> assume(a>0) ;Ia;
```

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a\sim}}$$

```
> a:='a';
```

$$a := a$$

Calculer $\int_0^{\infty} \mathbf{e}^{(-a\,x)} \cos(b\,x)^2\,dx$ avec a>0, $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{(x+a)\,(x-1)}\,dx$, $\int_0^{2\,\pi} \frac{1}{1+a^2\cos(x)}\,dx$ avec a compris entre -1 et 1, $\int \frac{1}{\sqrt{a}\,\sqrt{x+b}}\,dx$

```
> I3:=int(exp(-a*x)*cos(b*x)^2,x = 0 .. infinity);
```

$$I3 := \lim_{x \to \infty} -\frac{1}{2} \frac{a^2\,\mathbf{e}^{(-a\,x)}\cos(2\,b\,x) - 2\,b\,\mathbf{e}^{(-a\,x)}\sin(2\,b\,x)\,a + \mathbf{e}^{(-a\,x)}\,a^2 + 4\,\mathbf{e}^{(-a\,x)}\,b^2 - 2\,a^2 - 4\,b^2}{(a^2+4\,b^2)\,a}$$

```
> assume(a>0);I3;
```

$$\frac{a\sim^2 + 2\,b^2}{(a\sim^2 + 4\,b^2)\,a\sim}$$

```
> a:='a';b:='b';
```

$$a := a$$

$$b := b$$

```
> int(ln(x)/((x+a)*(x-1)),x = 0 .. infinity);
```

$$\frac{1}{2} \frac{\ln\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \pi^2}{1+a}$$

```
> int(1/(1+a*cos(x)),x = 0 .. 2*Pi);
```

$$-2\,\frac{I\,\mathrm{csgn}(I\,(-1+a)\,(\sqrt{(1+a)\,(-1+a)}))\,\pi}{\sqrt{-1+a^2}}$$

```
> assume(-1<a, a<1);
> int(1/(1+a*cos(x)),x = 0 .. 2*Pi);
```

$$2\frac{\pi}{\sqrt{1-a\sim^2}}$$

```
> a:='a';
```

$$a := a$$

```
> int(1/(sqrt(a)*sqrt(x)+b),x);
```

$$-\frac{b\ln(b^2-x\,a)}{a}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}}-\frac{2\,b\,\operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt{a}}{b}\right)}{a}$$

```
>
```

I.5 Intégrales multiples

On peut calculer des intégrales double et triple avec Maple de manière très simple en utilisant l'instruction **int** de manière successive.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+y)\cos(x+y)\,dx\,dy,\quad \int_0^1\int_0^1\frac{x\,y}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$$

```
> int(int((x+y)*cos(x+y),x = 0 .. Pi/2),y = 0 .. Pi/2);
```

$$-4+\pi$$

```
> simplify(int(int(x*y/(1+x^2+y^2),x = 0 .. 1),y = 0 .. 1));
```

$$\frac{3}{4}\ln(3)-\ln(2)$$

II Exercice: Intégrale d'une fonction rationnelle

Soit la fonction

$$f(x)=\frac{x^4+a\,x^3+b}{(x-2)^2\,(x-c)^2}$$

ou a, b et c sont des réels.
Le but de l'exercice est de determiner les valeurs de a, b et c telles que la primitive de f soit une fonction rationnelle.

1. Decomposer f en elements simples. On utilisera la fonction "convert" avec l'option "parfrac".
2. En deduire la condition pour que la primitive de f soit une fonction rationnelle.
3. Resoudre et donner les valeurs de a et b en fonction de c (on pourra utiliser

solve). Verifier que la primitive de f est alors bien rationnelle.

4. Que pensez-vous du cas c=2?

```
> f:=x->(x^4+a*x^3+b)/((x-2)^2*(x-c)^2);
```

$$f := x \to \frac{x^4 + a\,x^3 + b}{(x-2)^2\,(x-c)^2}$$

```
> g:=convert(f(x),parfrac,x);
```

$$g := 1 + \frac{c^4 + c^3\,a + b}{(x-c)^2\,(4 - 4\,c + c^2)} + \frac{16 + 8\,a + b}{(x-2)^2\,(4 - 4\,c + c^2)} + \frac{12\,c\,a - 8\,a + 2\,b + 32\,c - 32}{(x-2)\,(12\,c - 6\,c^2 + c^3 - 8)} + \frac{c^3\,a - 2\,b + 2\,c^4 - 8\,c^3 - 6\,c^2\,a}{(x-c)\,(12\,c - 6\,c^2 + c^3 - 8)}$$

```
> s1:=solve({coeff(g,1/(x-2))=0,coeff(g,1/(x-c))=0},{a,b});
```

$$s1 := \{a = -2\,c - 4,\ b = 12\,c^2\}$$

```
> int(subs(s1,f(x)),x);
```

$$x - \frac{8 + 12\,c}{(-2 + c)\,(x-2)} + \frac{c^2\,(6 + c)}{(-2 + c)\,(x-c)}$$

```
> h:=subs(c=2,f(x));
```

$$h := \frac{x^4 + a\,x^3 + b}{(x-2)^4}$$

```
> g:=convert(h,parfrac,x);
```

$$g := 1 + \frac{32 + 12\,a}{(x-2)^3} + \frac{16 + 8\,a + b}{(x-2)^4} + \frac{24 + 6\,a}{(x-2)^2} + \frac{a + 8}{x - 2}$$

La condition sur a est toujours valable mais il n'y en a plus sur b.

III Méthodes de cotes

II.1 Formules simples des méthodes de Cotes

Sur un intervalle élémentaire on calcule la différence entre la méthode des trapèzes et le calcul exact $\int_a^{a+h} \mathrm{f}(x)\,dx - \frac{h\,(\mathrm{f}(a) + \mathrm{f}(a+h))}{2}$. On souhaite determiner l'ordre en h du résultat.

Procéder de meme pour la méthode de simpson en calculant $\int_a^{a+2h} \mathrm{f}(x)\,dx - \frac{h\,(\mathrm{f}(a) + 4\,\mathrm{f}(a+h) + \mathrm{f}(a+2\,h))}{3}$

```
> restrap:=simplify(series(int(f(x),x=a..a+h)-h/2*(f(a)+f(a+
  h)),h,4));
```

$$restrap := -\frac{1}{12}\,(\mathrm{D}^{(2)})(f)(a)\,h^3 + \mathrm{O}(h^4)$$

```
> ressimp:=simplify(series(int(f(x),x=a..a+2*h)-h/3*(f(a)+4*
  f(a+h)+f(a+2*h)),h,6));
```

$$ressimp := -\frac{1}{90}\,(\mathrm{D}^{(4)})(f)(a)\,h^5 + \mathrm{O}(h^6)$$

```
>
```

II.2 Convergence de Simpson

Pour calculer une intégrale, il existe un grand nombre de méthodes. Nous allons voir quelques unes de celles-ci. Soit une fonction notée ff.

L'intégrale à calculer est la suivante $\int_a^b \mathrm{ff}(x)\,dx$.

La méthode des rectangles estime cette intégrale par la formule :

$$\frac{(b-a)\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{ff}\left(a+\frac{(b-a)\,i}{n}\right)\right)}{n}.$$

Ecrire une procédure rectangle dont les variables sont a, b, n et le nom de la fonction ff.

L'intégrale que nous allons tester est la suivante : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)}{x+1}\,dx$.

Faire le calcul pour n de 50 à 500 avec un pas de 50. (Indication: faire une boucle sur n)

En supposant que la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée notée I_n est de la forme $\frac{A}{n^{\alpha}}$, déterminer la valeur de α.

La méthode des trapèzes estime cette intégrale par la formule :

$$\frac{(b-a)\left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{ff}\left(a+\frac{(b-a)\,i}{n}\right)\right)+\frac{\mathrm{ff}(a)+\mathrm{ff}(b)}{2}\right)}{n}.$$

Ecrire une procédure trapeze dont les variables sont a, b, n et le nom de la fonction ff.

En supposant que la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée notée I_n est la forme $\frac{A}{n^{\beta}}$, déterminer la valeur de β.

Utiliser ensuite l'option Digits:=10; que notez vous?

On veut calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}\,dx$. Quelles valeurs de α et de β trouve-t-on?

Conclusion.

```
> rectangle:=proc(a,b,n::posint,ff)
> local a1,b1,n1,i,delta;
> a1:=a;b1:=b;n1:=n;delta:=(b-a)/n;
> evalf(delta*(sum(ff(a+delta*i),i=0..n-1)));
> end;
```

rectangle := **proc**(*a*, *b*, *n*::*posint*, *ff*)

local *a1*, *b1*, *n1*, *i*, δ;

$a1 := a; b1 := b; n1 := n; \delta := (b-a)/n;$ evalf(δ∗sum(*ff*(*a* + δ∗*i*), *i* = 0 .. *n* − 1))

end proc

```
> ff:=unapply(tan(x)/(x+1),x);
```

$$ff := x \to \frac{\tan(x)}{x+1}$$

```
> valex:=evalf(int(ff(x),x = 0 .. Pi/4));
```

$$valex := 0.2292137172$$

```
> for j from 100 to 500 by 50 do
  tmp:=abs((valex-rectangle(0,Pi/4,j,ff))/(valex-rectangle(0,Pi
  /4,(j-50),ff)));
  evalf(ln(tmp)/ln(abs((j-50)/j)) );
  od;
```

$$tmp := 0.4997740625$$
$$1.000652065$$
$$tmp := 0.6665662803$$
$$1.000371403$$
$$tmp := 0.7499433793$$
$$1.000262432$$
$$tmp := 0.7999639273$$
$$1.000202076$$
$$tmp := 0.8333082375$$
$$1.000165177$$
$$tmp := 0.8571239986$$
$$1.000142729$$
$$tmp := 0.8749859191$$
$$1.000120516$$
$$tmp := 0.8888791302$$
$$1.000093210$$
$$tmp := 0.8999891168$$
$$1.000114773$$

```
> trapeze:=proc(a,b,n::posint,ff)
> local a1,b1,n1,i,delta;
> a1:=a;b1:=b;n1:=n;delta:=(b-a)/n;
> evalf(delta*(sum(ff(a+delta*i),i=0..n1-1)+(-ff(a)+ff(b)/2)));
> end;
```

trapeze := **proc**(*a*, *b*, *n*::*posint*, *ff*)

local *a1*, *b1*, *n1*, *i*, δ;

$a1 := a$;

$b1 := b$;

$n1 := n$;

$\delta := (b - a) / n$;

evalf(δ*(sum(*ff*($a + \delta * i$), $i = 0 .. n1 - 1$) − *ff*(a) + 1 / 2**ff*(b)))

end proc

```
> Digits:=10;
```

$$Digits := 10$$

```
> for j from 100 to 500 by 50 do
  tmp:=abs((valex-trapeze(0,Pi/4,j,ff))/(valex-trapeze(0,Pi/4,(
  j-50),ff)));
  evalf(ln(tmp)/ln(abs((j-50)/j)) );
  od;
```

$$tmp := 0.2500000000$$
$$2.000000000$$
$$tmp := 0.4443997587$$
$$2.000247982$$
$$tmp := 0.5617367707$$
$$2.004719701$$
$$tmp := 0.6399839099$$
$$2.000112668$$
$$tmp := 0.6937106918$$
$$2.005798340$$
$$tmp := 0.7346014493$$
$$2.000816168$$
$$tmp := 0.7797029703$$
$$1.863548595$$
$$tmp := 0.8187702265$$
$$1.697628077$$
$$tmp := 0.8064516129$$
$$2.041669768$$

```
> gg:=unapply(tan(x)^(1/4),x);
```

$$gg := x \to \tan(x)^{(1/4)}$$

```
> valex2:=evalf(int(gg(x),x = 0 .. Pi/4));
```

$$valex2 := 0.6046248155$$

```
> for j from 100 to 500 by 50 do
  tmp:=abs((valex2-rectangle(0,Pi/4,j,gg))/(valex2-rectangle(0,
  Pi/4,(j-50),gg)));
  evalf(ln(tmp)/ln(abs((j-50)/j)) );
  od;
```

$$tmp := 0.4855395128$$
$$1.042339389$$
$$tmp := 0.6564863000$$
$$1.037952330$$
$$tmp := 0.7424135768$$
$$1.035340184$$
$$tmp := 0.7940419960$$
$$1.033500301$$
$$tmp := 0.8284723612$$
$$1.032087516$$
$$tmp := 0.8530611430$$
$$1.030965638$$
$$tmp := 0.8715010473$$
$$1.030006575$$
$$tmp := 0.8858354307$$
$$1.029215194$$
$$tmp := 0.8973021130$$
$$1.028494110$$

```
> for j from 100 to 500 by 50 do
  tmp:=abs((valex2-trapeze(0,Pi/4,j,gg))/(valex2-trapeze(0,Pi/4
  ,(j-50),gg)));
  evalf(ln(tmp)/ln(abs((j-50)/j)) );
  od;
```

$$tmp := 0.4214374671$$
$$1.246609515$$
$$tmp := 0.6029437427$$
$$1.247780320$$
$$tmp := 0.6982986794$$
$$1.248282026$$
$$tmp := 0.7568280520$$

1.248609667

$tmp := 0.7963806268$

1.248771879

$tmp := 0.8248750280$

1.248929849

$tmp := 0.8463821061$

1.249027334

$tmp := 0.8631825696$

1.249153218

$tmp := 0.8766802143$

1.249168041

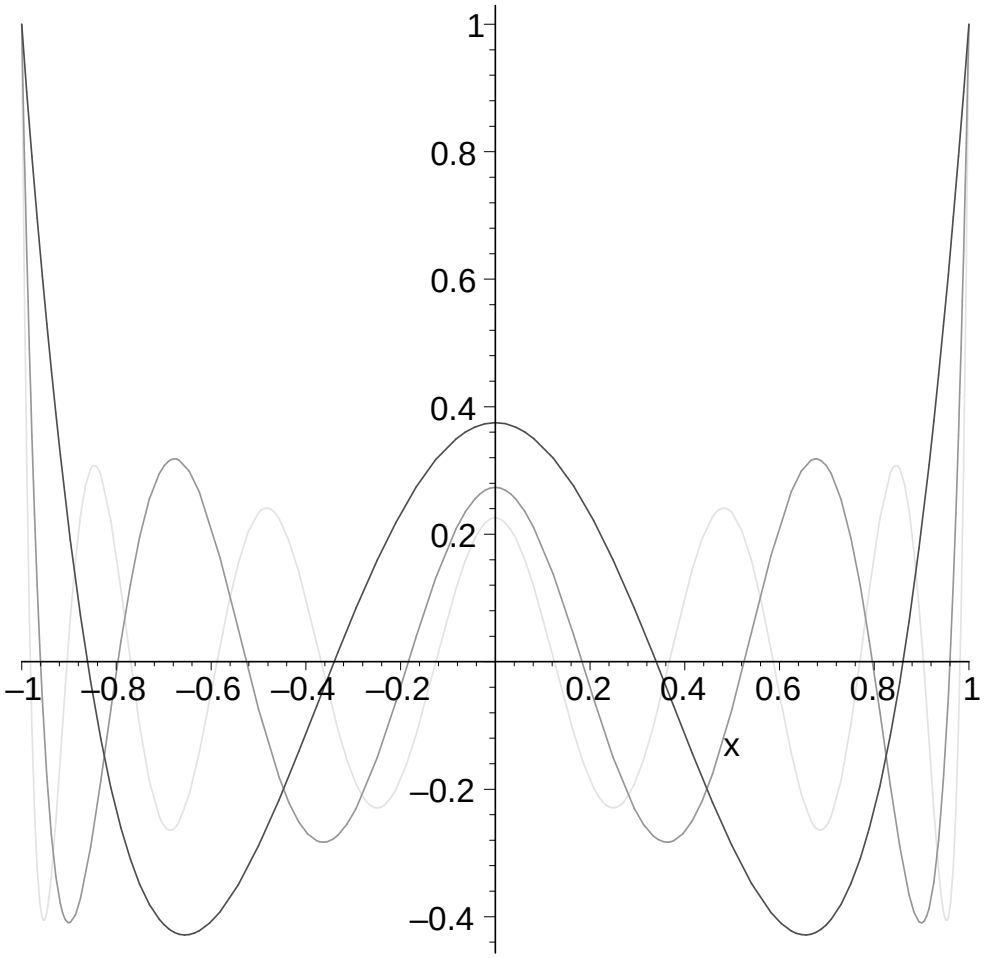
l'exposant de la méthode des trapèzes est 1.5 au lieu de 2 car la fonction a une dérivée infini à l'origine et démarre en $\sqrt{x}$, d'ou le résultat 2-1/2. L'exposant 2 est obtenu pour une fonction ayant un développement analytique. Si la fonction a un comportement en x^alpha;, l'exposant est
1+alpha;.

IV. Méthode de Gauss

On se propose de reconstruire simplement la méthode de Gauss en utilisant les polynômes orthogonaux de Legendre.

1)En utilisant la bibliothèque **orthopoly**, tracer sur le meme graphe, le polynôme de Legendre de degré 4, 8, et 12 sur l'intervalle [-1,1].
Que remarque-t-on pour les racines?

```
> with(orthopoly):
> plot([seq(P(4*i,x),i=1..3)],x=-1..1);
```



Les racines sont toutes comprises dans l'intervalle [-1,1]. Elles sont de plus alternées.
>

2) Calculer en utilisant l'instruction **fsolve** les racines des polynomes de Legendre de degré 10, en les placant dans une liste que l'on notera absc.

```
> absc:=[fsolve(P(10,x),x)];
```

$absc$:= [-0.9739065285, -0.8650633667, -0.6794095683, -0.4333953941, -0.1488743390, 0.1488743390, 0.4333953941, 0.6794095683, 0.8650633667, 0.9739065285]

La formule d'intégration de Gauss-Legendre approche la valeur exacte de l'intégrale par la formule

$\int_{-1}^{1} \mathrm{f}(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} w_i\,\mathrm{f}(x_i)$ où N est le nombre de points de l'intervalle compris entre -1 et 1 et

correspondant aux racines du polynôme de Legendre de degré N.
Les w_i sont appelés les poids et peuvent etre calculés par la formule

$$w_i = \frac{d_N \langle P_{N-1}(x) \mid P_{N-1}(x) \rangle}{d_{N-1} P_{N-1}(x_i) Q_N(x_i)}$$

où N est le degré du polynôme le plus élévé, d_N et d_{N-1} sont respectivement les coefficients du monôme le plus élevé pour P_N et P_{N-1}.
Q_N est le polynôme dérivé de P_N. De plus $\langle P_{N-1}(x) \mid P_{N-1}(x) \rangle$ répresente la norme du polynôme P_{N-1} au carré sur l'intervalle [-1,1]..

3) Calculer exactement $\langle P_9(x) \mid P_9(x) \rangle$
4) Définir la fonction dérivée de $P_{10}(x)$
5) Déterminer le rapport $\frac{d_{10}}{d_9}$ en utilisant l'instruction **coeff**.
5) Pour N=10, calculer les 10 poids w_i

```
> norma:=int(P(9,x)*P(9,x),x=-1..1);
```

$$norma := \frac{2}{19}$$

```
> PD10:=unapply(diff(P(10,x),x),x);
```

$$PD10 := x \to \frac{230945}{128} x^9 - \frac{109395}{32} x^7 + \frac{135135}{64} x^5 - \frac{15015}{32} x^3 + \frac{3465}{128} x$$

```
> ratio:=coeff(P(10,x),x,10)/coeff(P(9,x),x,9);
```

$$ratio := \frac{19}{10}$$

```
> for i from 1 to 10 do
  w||i:=evalf(ratio*norma/(P(9,absc[i])*PD10(absc[i]))) od;
```

$$w1 := 0.06667131300$$
$$w2 := 0.1494513488$$
$$w3 := 0.2190863696$$
$$w4 := 0.2692667218$$
$$w5 := 0.2955242248$$
$$w6 := 0.2955242248$$
$$w7 := 0.2692667218$$
$$w8 := 0.2190863696$$
$$w9 := 0.1494513488$$
$$w10 := 0.06667131300$$

On se propose maintenant de vérifier la précision de cette formule.

Soit le polynôme $\mathrm{PP}(x) = \sum_{j=1}^{22} a_j x^j$.

6) Calculer exactement $\int_{-1}^{1} \mathrm{PP}(x)\,dx$

7) Calculer l'intégrale de manière approchée avec la méthode de Gauss-Legendre d'ordre 10.

8) Faire la différence entre les deux résultats précédents . Que peut-on conclure?

```
> PP:=unapply(sum('a[j]*x^j',j=1..22),x);
```

$$PP := x \to a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + a_9 x^9 + a_{10} x^{10} + a_{11} x^{11} + a_{12} x^{12} + a_{13} x^{13} + a_{14} x^{14} + a_{15} x^{15} + a_{16} x^{16} + a_{17} x^{17} + a_{18} x^{18} + a_{19} x^{19} + a_{20} x^{20} + a_{21} x^{21} + a_{22} x^{22}$$

```
> PPexact:=int(PP(x),x=-1..1);
```

$$PPexact := \frac{2}{3} a_2 + \frac{2}{5} a_4 + \frac{2}{7} a_6 + \frac{2}{9} a_8 + \frac{2}{11} a_{10} + \frac{2}{13} a_{12} + \frac{2}{15} a_{14} + \frac{2}{17} a_{16} + \frac{2}{19} a_{18} + \frac{2}{21} a_{20} + \frac{2}{23} a_{22}$$

```
> PPGL:=sum('w||j*PP(absc[j])',j=1..10);
```

$$PPGL := 0.3999999464\, a_4 + 0.2857142336\, a_6 - 0.338637\, 10^{-10} a_7 - 0.1673617\, 10^{-10} a_9 + 0.1818181339\, a_{10} - 0.22942939\, 10^{-11} a_{11} + 0.1538461082\, a_{12} - 0.1\, 10^{-11} a_{13} + 0.1333332901\, a_{14} + 0.1176470177\, a_{16} + 0.28338\, 10^{-11} a_{17} + 0.1052631189\, a_{18} + 0.09523513269\, a_{20} + 0.08694116246\, a_{22} + 0.6666666142\, a_2 + 0.2222221718\, a_8$$

```
> PPGL-PPexact;
```

$$-0.536\, 10^{-7} a_4 - 0.521\, 10^{-7} a_6 - 0.338637\, 10^{-10} a_7 - 0.1673617\, 10^{-10} a_9 - 0.479\, 10^{-7} a_{10} - 0.22942939\, 10^{-11} a_{11} - 0.456\, 10^{-7} a_{12} - 0.1\, 10^{-11} a_{13} - 0.432\, 10^{-7} a_{14} - 0.411\, 10^{-7} a_{16} + 0.28338\, 10^{-11} a_{17} - 0.390\, 10^{-7} a_{18} - 0.296255\, 10^{-5} a_{20} - 0.00001535928\, a_{22} - 0.525\, 10^{-7} a_2 - 0.504\, 10^{-7} a_8$$

V Méthode de Gauss-Kronrod

Extension of Gauss-Legendre integration formulas

Construction of polynomial for the extension from 7 to 15 nodes