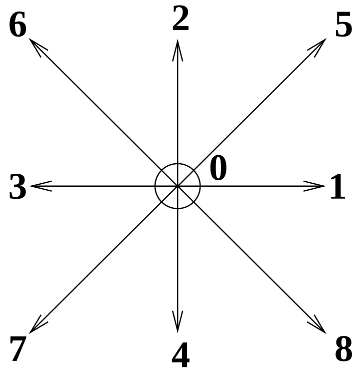
Cours de DEA – 1998-1999
Fluides discrets – gaz sur réseau
Projet informatique

Modèle de Boltzmann BGK à 9 vitesses
Mesures de viscosité

1 Modèle BGK à 9 vitesses sur réseau carré



Les vitesses $\{C_i\}_{i=0\cdots 8}$ ont comme module

$$|\mathbf{C}_i| = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ c & \text{si } i = 1,2,3,4 \\ c\sqrt{2} & \text{si } i = 5,6,7,8 \end{cases}$$

On prendra $c = 1$.
La probabilité d'occuper un état de vitesse i est donnée par

$$0 \leq N_i(\mathbf{x}, t) \leq 1.$$

Le système évolue par alternance d'étapes de collision et de propagation, ce qui se traduit par l'équation d'évolution suivante

$$N_i(\mathbf{x} + \mathbf{C}_i, t+1) = N_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\tau}\left[N_i^{eq}(\mathbf{x}, t) - N_i(\mathbf{x}, t)\right]$$

La distribution d'équilibre N_i^{eq} est donnée par

$$N_i^{eq} = w_i \left\{ \rho + \frac{(\mathbf{C}_i.\mathbf{j})}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{C}_i.\mathbf{j})^2}{2\rho c_s^4} - \frac{\mathbf{j}^2}{2\rho c_s^2} \right\} \tag{1}$$

avec

$$w_i = \begin{cases} 4/9 & \text{si } i = 0 \\ 1/9 & \text{si } i = 1,2,3,4 \\ 1/36 & \text{si } i = 5,6,7,8 \end{cases}$$

et $c_s = c/\sqrt{3}$. Les valeurs de ρ et $\mathbf{j} = \rho\mathbf{u}$ utilisées pour calculer N_i^{eq} sont celles que l'on mesure en chaque site juste avant la collision.
Pour que le schéma soit stable, il faut que $0 < 1/\tau < 2$.

Pour les écoulements faiblement compressibles, on peut remplacer les ρ apparaissant au dénominateur de la formule (1) par la densité moyenne initiale ρ_0. Cela permet d'avoir un schéma plus stable et plus rapide (on peut remplacer la division par un produit).
Pour faciliter la programmation, il est conseillé de définir un tableau un peu plus large que celui qu'on veut simuler, i.e. d'ajouter une rangée de sites tout autour du maillage.
On travaillera en double précision.

2 Mesure de la viscosité de cisaillement

On emploie des conditions aux limites périodiques.
On initialise le réseau avec une densité constante et une onde de cisaillement

$$u_y = \Delta u_o \cos(kx)$$

où k est le vecteur d'onde. On prendra une taille de boite égale à un nombre entier de longueurs d'onde.
Cette onde de cisaillement décroit en $e^{-\alpha t}$. La viscosité est obtenue par:

$$\nu = \lim_{k \to 0} \alpha / k^2$$

- Mesurer ν pour plusieurs valeurs de τ. Pour obtenir α, on mesurera

  $$A = \frac{1}{n_x n_y} \sum_{\mathbf{x}=(x,y)} u_y(\mathbf{x}) \cos(kx) \simeq \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda u_y(\mathbf{x}) \cos(kx) dx$$

  qui décroit également en $e^{-\alpha t}$.

- Test de l'invariance Galiléenne: on superpose à l'onde de cisaillement une vitesse constante dans la direction x. Cela modifie-t-il la valeur de ν obtenue? Pour mesurer ν dans ce cas, on considera que l'onde de cisaillement évolue comme

  $$\cos k(x - Ut) e^{-\alpha t},$$

  et on mesurera par exemple

  $$A = \frac{1}{n_x n_y} \sum_{\mathbf{x}=(x,y)} u_y(\mathbf{x}) \cos(kx) dx$$

  et

  $$B = \frac{1}{n_x n_y} \sum_{\mathbf{x}=(x,y)} u_y(\mathbf{x}) \sin(kx) dx$$

  (Si on suppose U connu a priori, alors la mesure de l'une de ces 2 quantités suffit).

3 Mesure de la viscosité de compression

On initialise le maillage avec une onde de compression

$$u_x = \Delta u_o \cos(kx)$$

On ne fera pas le test d'invariance Galiléenne dans ce cas (car il serait plus compliqué de découpler le mouvement de translation et l'onde de compression que dans le cas du cisaillement).

Pour tout renseignement complémentaire, envoyer un mail à appert@physique.ens.fr